

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi : TOÁN

Ngày thi : 02 tháng 6 năm 2019

Thời gian làm bài : 120 phút

Bài I (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{4(\sqrt{x+1})}{25-x}$ và $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x+5}} \right) : \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-5}}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Bài II (2,5 điểm)

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình :

Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 15 ngày làm xong. Nếu đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày rồi dừng lại và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 25% công việc. Hỏi nếu mỗi đội làm riêng thì trong bao nhiêu ngày mới xong công việc trên ?

2) Một bồn nước inox có dạng một hình trụ với chiều cao 1,75 m và diện tích đáy là 0,32 m².

Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước ? (Bỏ qua bề dày của bồn nước).

Bài III (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$.

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = 2mx - m^2 + 1$ và parabol $(P): y = x^2$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa

$$\text{mãn } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-2}{x_1 x_2} + 1.$$

Bài IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H .

1) Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF .

3) Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm I , đường thẳng EF cắt đường thẳng AH tại điểm P . Chứng minh tam giác APE đồng dạng với tam giác AIB và đường thẳng KH song song với đường thẳng IP .

Bài V (0,5 điểm)

Cho biểu thức $P = a^4 + b^4 - ab$, với a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + ab = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P .

..... Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

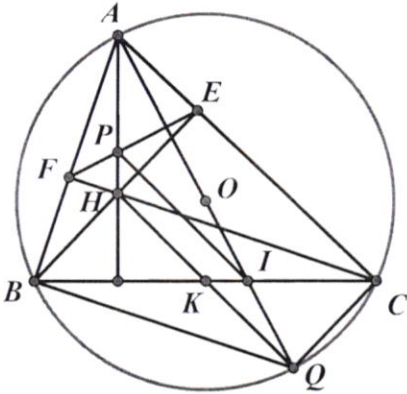
Họ tên thí sinh : Số báo danh :

Họ tên, chữ kí của cán bộ coi thi số 1 :

Họ tên, chữ kí của cán bộ coi thi số 2 :

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
Bài I 2,0 điểm	1)	Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x}$ khi $x = 9$.	0,5
		Thay $x = 9$ vào biểu thức $A = \frac{4(\sqrt{9}+1)}{25-9}$	0,25
		Tính được $A = 1$	0,25
	2)	Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.	1,0
		$\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} = \frac{15-\sqrt{x}+2(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)}$	0,25
		$= \frac{1}{\sqrt{x}-5}$	0,25
		$B = \frac{1}{\sqrt{x}-5} \times \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1}$	0,25
		$B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$	0,25
	3)	Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.	0,5
		$P = A.B = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x} \times \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{4}{25-x}$	0,25
Lập luận để P đạt giá trị nguyên lớn nhất bằng 4 khi $x = 24$		0,25	
Bài II 2,5 điểm	1)	Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 15 ngày làm xong. Nếu đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày rồi dừng lại và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 25% công việc. Hỏi nếu mỗi đội làm riêng thì trong bao nhiêu ngày mới xong công việc trên ?	2,0
		Gọi thời gian đội thứ nhất làm riêng xong công việc là x (đơn vị: ngày, $x > 0$)	0,25
		Gọi thời gian đội thứ hai làm riêng xong công việc là y (đơn vị: ngày, $y > 0$)	0,25
		1 ngày đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc)	0,25
		1 ngày đội thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc)	
Hai đội cùng làm chung một công việc sau 15 ngày xong, có phương trình			

		$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15} \quad (1)$	0,25
		Đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 25% công việc, có phương trình	0,25
		$\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4} \quad (2)$	
		Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15} \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$	0,25
		Giải hệ phương trình tìm được $\begin{cases} x = 24 \\ y = 40 \end{cases}$	0,25
		Đối chiếu điều kiện và kết luận: đội thứ nhất làm riêng thì sau 24 ngày xong công việc, đội thứ hai làm riêng thì sau 40 ngày xong công việc.	0,25
	2)	Một bồn nước inox có dạng một hình trụ với chiều cao 1,75 m và diện tích đáy là 0,32 m². Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước ? (Bỏ qua bề dày của bồn nước).	0,5
		Số mét khối nước bồn đựng đầy bằng thể tích của bồn.	0,25
		Bồn nước đựng được số mét khối nước là $1,75 \times 0,32 = 0,56 \text{ (m}^3\text{)}$.	0,25
Bài III 2,0 điểm	1)	Giải phương trình $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$.	1,0
		$\Leftrightarrow (x^2 + 2)(x^2 - 9) = 0$	0,25
		TH1: $x^2 = -2$ (vô nghiệm)	0,25
		TH2: $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = -3$	0,25
		Tập nghiệm phương trình $S = \{-3; 3\}$.	0,25
	2)	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = 2mx - m^2 + 1$ và parabol (P): $y = x^2$.	0,5
		a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.	
		Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) $x^2 = 2mx - m^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$	0,25
		$\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1 ; \Delta' > 0 \quad \forall m$	0,25
		Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m.	
	b) Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-2}{x_1 x_2} + 1.$	0,5	
	Theo định lý Vi-et: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1 x_2 = m^2 - 1$ $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-2}{x_1 x_2} + 1; \text{ĐK: } x_1 x_2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$		

		$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-2 + x_1 x_2}{x_1 x_2} \Rightarrow x_1 + x_2 = -2 + x_1 x_2$	0,25	
		$\Leftrightarrow 2m = -2 + m^2 - 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow (m + 1)(m - 3) = 0$ $\Rightarrow m = -1 \text{ (loại) hoặc } m = 3 \text{ (tmđk). Vậy } m = 3.$	0,25	
Bài IV 3,0 điểm	1)	Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H.	1,0	
		1) Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.		
			Vẽ đúng hình đến ý 1)	0,25
			$BE \perp AC \Rightarrow BEC = 90^\circ$	0,25
			$CF \perp AB \Rightarrow CFB = 90^\circ$	0,25
			\Rightarrow bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC .	0,25
			2) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.	1,0
			Ta có $BCEF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow AEF = ABC$	0,25
			Kẻ đường kính $AQ \Rightarrow \Delta AQC$ vuông tại $C \Rightarrow QAC + AQC = 90^\circ$	0,25
			Xét (O) có $AQC = ABC = \frac{1}{2}$ số đo AC	0,25
			$\Rightarrow AEF + EAO = 90^\circ \Rightarrow AO \perp EF$.	0,25
			3) Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm I, đường thẳng EF cắt đường thẳng AH tại điểm P. Chứng minh tam giác APE đồng dạng với tam giác AIB và đường thẳng KH song song với đường thẳng IP.	1,0
			$EAO = HAB$ (vì cùng phụ với ABC) $\Rightarrow EAP = IAB$	0,25
			$AEP = ABI \Rightarrow \Delta APE$ đồng dạng ΔAIB (g.g)	0,25
			ΔAPE đồng dạng ΔAIB (g.g) $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AP}{AI}$ (1)	0,25
	ΔAEH đồng dạng ΔABQ (g.g) $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AQ}$ (2)			
	Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{AP}{AI} = \frac{AH}{AQ} \Rightarrow \frac{AP}{AH} = \frac{AI}{AQ} \Rightarrow PI \parallel HQ$ (3)			
	Chứng minh tứ giác $HCQB$ là hình bình hành $\Rightarrow H, K, Q$ thẳng hàng (4) Từ (3), (4) $\Rightarrow KH \parallel IP$.	0,25		

X.H.C
 O D
 O T A
 H A M

Bài V 0,5 điểm	Cho biểu thức $P = a^4 + b^4 - ab$, với a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + ab = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.	0,5
	$P = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 - ab$ $= (3 - ab)^2 - 2a^2b^2 - ab = -a^2b^2 - 7ab + 9 = -\left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{85}{4}$ <p>Ta có $a^2 + b^2 + 2ab = 3 + ab \Rightarrow 3 + ab = (a + b)^2 \Rightarrow ab \geq -3$ $3 - ab = a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow ab \leq 1$</p>	0,25
	<p>Vì $-3 + \frac{7}{2} \leq ab + \frac{7}{2} \leq 1 + \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 \leq \frac{81}{4}$</p> $\Rightarrow -\frac{1}{4} \geq -\left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 \geq -\frac{81}{4} \Rightarrow \frac{85}{4} - \frac{1}{4} \geq P \geq \frac{85}{4} - \frac{81}{4} \Rightarrow 21 \geq P \geq 1$ <p>GTLN của $P = 21$, xảy ra khi $a = \sqrt{3}, b = -\sqrt{3}$ hoặc $a = -\sqrt{3}, b = \sqrt{3}$ GTNN của $P = 1$, xảy ra khi $a = b = 1$. hoặc $a = b = -1$</p>	0,25
TỔNG ĐIỂM		10,0

