## Phần I. ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH
## LƯỢNG GIÁC

**Công thức lượng giác**

1. Trên đường tròn lượng giác gốc A, cho điểm M có số đo cung AM là α thì

$\sin\alpha = y_M$. $\cos\alpha = x_M$.

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ($\alpha \neq \pi/2 + k\pi$, k thuộc Z) $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ ($\alpha \neq k\pi$, k thuộc Z)

2. Các tính chất

Với mọi α ta có $-1 \le \sin\alpha \le 1$ hay $|\sin\alpha| \le 1$; $-1 \le \cos\alpha \le 1$ hay $|\cos\alpha| \le 1$

3. Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\tan\alpha\cot\alpha = 1$

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

4. Các công thức liên hệ cung

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$ $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

$\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos\alpha$ $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos\alpha$

$\tan(\pi/2 + \alpha) = -\cot\alpha$ $\tan(\pi/2 - \alpha) = \cot\alpha$

$\cot(\pi/2 + \alpha) = -\tan\alpha$ $\cot(\pi/2 - \alpha) = \tan\alpha$

5. Công thức cộng

$\cos(a + b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$ $\cos(a - b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

$\sin(a + b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$ $\sin(a - b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$

$\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$ $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$

6. Công thức nhân đôi

$\sin 2a = 2\sin a\cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$

7. Công thức hạ bậc

$\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

8. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

9. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\tan\alpha + \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ $\tan\alpha - \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

**Bài 1**. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a. $y = \cos x + \sin x$ b. $y = \tan 2x$ c. $y = \tan^2 x + \cot x$

d. $y = \dfrac{\tan x}{1+\sin 2x}$ e. $y = \dfrac{2\sin x}{2\cos x + 1}$ g. $y = \sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}}$

h. y = sin x tan (x + π/4) i. y = cot (2x – π/3)

Cách xác định tính chẵn, lẻ của hàm số lượng giác

Bước 1. Tìm tập xác định D; với mọi x thuộc D → –x thuộc D.

Bước 2. Tính f(–x); so sánh với f(x). Có một trong 3 khả năng

Nếu f(–x) = f(x) → hàm số chẵn

Nếu f(–x) = –f(x) → hàm số lẻ

Nếu tồn tại $x_o$ sao cho $f(-x_o) \neq f(x_o)$ & $f(-x_o) \neq -f(x_o)$ thì tính $f(-x_o)$, $f(x_o)$ → hàm số không chẵn không lẻ.

**Bài 2**. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau

a. y = 2 cos x b. y = sin x + x c. y = sin 2x + 2

d. $y = -2\tan^2 x$ e. $y = \sin|x| + x^2$ f. y = |2x + 1| + |2x – 1|

**Bài 3**. Lập bảng biến thiên của hàm số

a. y = –sin x + 1 trên đoạn [–π; π]

b. y = –2cos (2x + π/3) trên đoạn [–2π/3; π/3]

**Bài 4**. Tìm GTLN, GTNN của các hàm số

a. y = 2 sin (x – π/2) + 3 b. y = 3 – 2 cos 2x c. $y = -1 - \cos^2(2x + \pi/3)$

d. $y = \sqrt{3+\cos^2 4x} - 2$ e. y = cos x + sin x f. $y = \sin^2 x - 4\sin x + 3$

**Bài 5**. Tìm GTLN, GTNN của các hàm số

a. y = sin x trên đoạn [–π/2; π/3] b. y = cos x trên đoạn [–π/2; π/2]

c. y = sin x trên đoạn [π/6; 3π/4] d. y = cos (πx / 4) trên đoạn [1; 3]

**Bài 6**. Giải các phương trình sau

a. $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$ b. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = -1$

d. $3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x = 1 + 4\sin^3 x$ e. $4\sin^4 x + 4\cos^4(x + \pi/4) = 1$

f. $\cos 4x - \sin 3x = \sqrt{3}(\cos 3x - \sin 4x)$ g. $\tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$

h. $\sqrt{3}(1 - \cos 2x) = 2\sin x\cos x$ i. $2\sin 2x + 2\sin^2 x = 1$

**Bài 7**. Giải các phương trình sau

a. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$ b. 2 cos 2x – 8 cos x + 5 = 0

c. 2 cos x cos 2x = 1 + cos 2x + cos 3x d. $2(\sin^4 x + \cos^4 x) = 2\sin 2x - 1$

e. $\cos(4x/3) = \cos^2 x$ f. $(3 + \tan^2 x)\cos x = 3$.

g. 5 tan x – 2 cot x – 3 = 0 h. $6\sin^2 3x + \cos 12x = 4$

**Bài 8**. Giải các phương trình sau

a. $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - \cos^2 x = -2$ b. $\sin^2 x - \sin 2x - (2\sqrt{3} + 3)\cos^2 x = 0$

c. $4\sin^2 x + 3\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$ d. $6\sin x - 2\cos^3 x = 5\sin 2x\cos x$

e. $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = 1/2$

**Bài 9**. Giải các phương trình sau

a. 3(sin x + cos x) + 2sin 2x + 3 = 0 b. sin 2x – 12(sin x – cos x) = –12

c. 2(cos x + sin x) – 4 sin x cos x – 1 = 0 d. cos x – sin x – 2sin 2x – 1 = 0

**Bài 10**. Giải các phương trình sau

a. cos 2x + 3 cos x + 2 = 0 b. 2 + cos 2x = – 5 sin x

c. $6 - 4\cos^2 x - 9\sin x = 0$ d. 2 cos 2x + cos x = 1

e. $4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7$ g. $3\sin^2 x + \cos^4 x - 1 = 0$

**Bài 11**. Giải các phương trình sau

a. 4(sin 3x – cos 2x) = 5(sin x – 1) b. $1 + \sin(x/2)\sin x - \cos(x/2)\sin^2 x = 2\cos^2(\pi/4 - x/2)$

c. 1 + 3 tan x = 2 sin 2x d. (2cos 2x – 8cos x + 7) cos x = 1.

e. $\sin 2x(\cot x + \tan x) = 4\cos^2 x$. f. $2\cos^2 2x + \cos 2x = 4\sin^2 2x\cos^2 x$

g. cos 3x – cos 2x – 2 = 0 h. 4 sin x + 2 cos x = 2 + 3 tan x.

i. sin 2x + 2 tan x – 3 = 0 j. $\sin^2 x + \sin^2 3x = 3\cos^2 2x$

k. $\tan^3(x - \pi/4) = \tan x - 1$ ℓ. sin 2x – cos 2x = 3 sin x + cos x – 2

m. sin 2x + cos 2x + tan x = 2. n. cos 3x – 2 cos 2x + cos x = 0

**Bài 12**. Giải các phương trình sau

a. $2\sin^2 x + 2\sin 2x = 3 - 2\cos^2 x$ b. $\cos^3 x - \sin^3 x = \cos x + \sin x$.

c. $\sin x \sin 2x + 2\sin 3x = 6\cos^3 x$ d. $\sin^3 x + \cos^3 x - 2(\sin^5 x + \cos^5 x) = 0$

e. $\sin^3(x - \pi/4) = \sqrt{2}\sin x$. f. $3\cos^4 x - \sin^2 2x + \sin^4 x = 0$.

**Bài 13**. Giải các phương trình sau

a. $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x$ b. $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$

c. $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = (3/2)\sin 2x$ d. $6(\cos x - \sin x) + \sin x\cos x + 6 = 0$

e. $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 + \sin x\cos x$ f. $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \sin x + \cos x = \frac{10}{3}$

g. $2\tan x + 3\tan^2 x + 4\tan^3 x + 2\cot x + 3\cot^2 x + 4\cot^3 x = 18$.

h. $2(1 + \cot^2 x) + 2\tan^2 x + 5\tan x + 5\cot x + 4 = 0$.

i. $\cos^3 x - \sin^3 x + 1 = 0$.

j. $2\cos 2x + \sin^2 x\cos x + \cos^2 x\sin x = 2(\sin x + \cos x)$

**Bài 14**. Giải các phương trình sau

a. $\sin 2x + 2\cos 2x = 1 + \sin x - 4\cos x$ b. $\sin 2x - \cos 2x = 3\sin x + \cos x - 2$

c. $\sin^2 x + \sin^2 3x - 3\cos^2 2x = 0$ d. $\cos 3x\cos^3 x - \sin 3x\sin^3 x = \cos^3 4x + 1/4$

e. $\sin^4(x/2) + \cos^4(x/2) - 1 + 2\sin x = 0$ f. $\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x = 0$

g. $\sin^6 x + \cos^6 x = \sin^4 x + \cos^4 x$ h. $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 x$

i. $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x - 4\sin^3 3x + 1 = 0$ j. $\cos x + \sin x = \sin x(1 - \cos x)$

k. $\sin^2(x/2 - \pi/4)\tan^2 x - \cos^2(x/2) = 0$ ℓ. $\cot x - \tan x + 4\sin x = 1/\sin x$

m. $\sin x\cos x + \cos x + 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ n. $\sin 3x = \cos x\cos 2x(\tan^2 x + \tan 2x)$

o. $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x = 4$ p. $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

q. $5(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}) = \cos 2x + 3$ r. $\sin^4 x + \cos^4 x - 2\sin 2x + \sin^3 2x = 0$

## TỔ HỢP XÁC SUẤT

### I. Quy tắc đếm

1. Quy tắc cộng: Giả sử công việc có thể tiến hành theo một trong hai phương án A và B. Phương án A có thể thực hiện bởi n cách; phương án B có thể thực hiện bởi m cách. Khi đó, công việc được thực hiện theo n + m cách.

2. Quy tắc nhân: Giả sử công việc bao gồm hai công đoạn A và B. Công đoạn A có thể thực hiện bởi n cách; công đoạn B có thể thực hiện bởi m cách. Khi đó, công việc được thực hiện bởi n.m cách.

### II. Hoán vị – Chỉnh hợp – Tổ hợp

1. Hoán vị

a. Định nghĩa: Cho tập A có n phần tử. Mỗi sự sắp xếp của n phần tử đó theo một thứ tự định trước là một phép hoán vị các phần tử của tập A.

b. Định lý: Số phép hoán vị của tập hợp có n phần tử, kí hiệu $P_n$ là: $P_n = n! = 1.2.3\ldots n$

Qui ước: $0! = 1$

2. Chỉnh hợp

a. Định nghĩa: Cho tập hợp A có n phần tử. Xét số tự nhiên $k \le n$. Khi lấy ra k phần tử trong số n phần tử rồi đem sắp xếp k phần tử đó theo một thứ tự định trước, ta được một phép chỉnh hợp chập k của n phần tử.

b. Định lý: Số chỉnh hợp chập k của n phần tử là $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

3. Tổ hợp

a. Định nghĩa: Cho tập hợp A có n phần tử và số tự nhiên $k \le n$. Một tập hợp con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

b. Định lý: Số tổ hợp chập k của n phần tử là $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

c. Hai tính chất cơ bản: $C_n^k = C_n^{n-k}$; $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$

### III. Khai triển nhị thức Newton

$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^n b^n$

+ Trong khai triển nhị thức Newton bậc n có n + 1 số hạng. Trong mỗi số hạng thì tổng số mũ của a và b là n. Số hạng tổng quát thứ k + 1 là $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

### IV. XÁC SUẤT

Phép thử ngẫu nhiên là phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù ta đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và kí hiệu là $\Omega$.

Biến cố là một tập con của không gian mẫu. Gọi $n(A)$ là số phần tử của biến cố A, còn $n(\Omega)$ là số kết quả có thể xảy ra của phép thử. Khi đó xác suất của biến cố A, kí hiệu là $P(A) = n(A)/n(\Omega)$.

Nếu $A \cap B = \phi$ thì ta nói A và B xung khắc. Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Định lý: $P(\phi) = 0$, $P(\Omega) = 1$, $0 \le P(A) \le 1$.

A và B là 2 biến cố độc lập khi và chỉ khi $P(A.B) = P(A).P(B)$

**Bài 1**. Bạn X vào siêu thị để mua một áo sơ mi cỡ 40 hoặc 41. Cỡ 40 có 3 màu khác nhau, cỡ 41 có 4 màu khác nhau. Hỏi X có bao nhiêu cách chọn?

**Bài 2**. Cho tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Có bao nhiêu số chẵn mà mỗi số gồm ba chữ số khác nhau chọn trong số các phần tử của A?

**Bài 3**. Từ tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ hỏi có thể lập được bao nhiêu số có 7 chữ số sao cho chữ số 1 xuất hiện ba lần, còn các chữ số khác xuất hiện một lần?

**Bài 4**. Bạn X mời hai bạn nam và ba bạn nữ dự tiệc sinh nhật. Bạn định xếp nam, nữ ngồi riêng trên các chiếc ghế, xếp theo một hàng dài. Hỏi X có bao nhiêu cách xếp đặt?

**Bài 5**. Trong mặt phẳng cho 7 điểm A, B, C, D, E, M, N khác nhau. Có bao nhiêu vectơ nối hai điểm trong các điểm đó?

**Bài 6**. Từ tập $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau?

**Bài 7**. Cho 7 điểm phân biệt không tồn tại ba điểm thẳng hàng. Từ 7 điểm trên có thể lập được bao nhiêu tam giác?

**Bài 8**. Một lớp có 30 học sinh. Cần chọn một bạn làm lớp trưởng, một bạn làm lớp phó và một bạn làm thư ký. Hỏi có bao nhiêu cách chọn, biết rằng học sinh nào cũng có khả năng làm lớp trưởng, lớp phó hoặc thư ký như nhau.

**Bài 9**. Tìm số tự nhiên n, nếu $6n - 6 + C_n^3 \ge C_{n+1}^3$

**Bài 10**. Từ 7 chữ số $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 5 chữ số đôi một khác nhau

a. Nếu số đó là số lẻ

b. Nếu số đó là số chẵn

c. số đó không chia hết cho 10.

**Bài 11**. Trong khai triển của $(2x^2 - 3/x^3)^{10}$, với $x \neq 0$, tìm số hạng không chứa x.

**Bài 12**. Tìm hệ số của $x^8$ trong khai triển $[1 + x^2(1 - x)]^8$.

**Bài 13**. Cho khai triển: $(1 + 2x)^{10} = a_o + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{10}x^{10}$. Tìm hệ số lớn nhất.

**Bài 14**. Tìm số hạng

a. thứ 13 trong khai triển $(3 - x)^{25}$.

b. thứ 18 trong khai triển $(2 - x^2)^{25}$.

c. không chứa x trong khai triển $(x + 1/x)^{12}$.

d. không chứa x trong khai triển $(x\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2})^{14}$

e. hữu tỉ trong khai triển của $(\sqrt{3} - \sqrt{15})^6$

f. đứng chính giữa trong khai triển của $(1 + x)^{10}$.

g. chứa $x^3$ trong khai triển của $(11 + x)^{11}$.

**Bài 15**. Tìm hệ số của số hạng chứa

a. $x^4$ trong khai triển $(x/3 - 3/x)^{12}$.

b. $x^8$ trong khai triển $(2/x^3 + x^2)^9$.

c. $x^5$ trong khai triển $(1 + x + x^2 + x^3)^{10}$.

d. $x^3$ trong khai triển $(x^2 - x + 2)^{10}$.

e. $x^3$ trong khai triển $S(x) = (1 + x)^3 + (1 + x)^4 + (1 + x)^5 + \ldots + (1 + x)^{50}$.

f. $x^3$ trong khai triển $S(x) = (1 + 2x)^3 + (1 + 2x)^4 + (1 + 2x)^5 + \ldots + (1 + 2x)^{22}$.

**Bài 16**. Tính tổng

a. $S_1 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n$

b. $S_2 = C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + C_{2n}^4 + \ldots + C_{2n}^{2n}$

c. $S_3 = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + C_{2n}^5 ... + C_{2n}^{2n-1}$

d. $T = C_n^0 - 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 - 2^3 C_n^3 + ... + (-2)^n C_n^n$

Bài 17. Có bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 6 chữ số đôi một khác nhau nhỏ hơn 600000.

Bài 18. Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5.

Bài 19. Với các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 5 chữ số khác nhau và phải có chữ số 5.

Bài 20. Với các số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 có thể lập được bao nhiêu số chẵn có 3 chữ số khác nhau và không lớn hơn 789.

Bài 21. Một nhóm học sinh gồm 10 nam, 6 nữ. Chọn ra một tổ gồm 8 người. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để tổ có nhiều nhất là 5 nữ.

Bài 22. Một lớp học có 40 học sinh, lớp cần cử ra một ban cán sự lớp gồm một lớp trưởng, một lớp phó và 3 ủy viên. Hỏi có mấy cách lập ra ban cán sự lớp

Bài 23. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh A, B, C, D và E vào một băng ghế dài sao cho

a. Bạn C ngồi chính giữa.

b. Hai bạn A và E ngồi hai đầu ghế.

Bài 24. Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không có đủ ba màu

Bài 25. Trong một phòng có hai bàn dài, mỗi bàn có 5 ghế. Người ta muốn xếp chỗ ngồi cho 10 hoc sinh gồm 5 nam và 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi nếu:

a. Các học sinh ngồi tùy ý

b. Các học sinh nam ngồi một bàn và các học sinh nữ ngồi bàn còn lại

Bài 26. Có 5 nhà toán học nam, ba nhà toán học nữ và bốn nhà vật lý nam. Lập một đoàn công tác 3 người cần có cả nam và nữ, cần có cả nhà toán học và nhà vật lý. Có bao nhiêu cách chọn.

Bài 27. Một đội văn nghệ có 20 người, trong đó có 10 nam và 10 nữ. Có bao nhiêu cách chọn ra năm người sao cho

a. Có đúng hai nam

b. Có ít nhất hai nam và ít nhất một nữ

Bài 28. Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 9. Tính xác suất để

a. Số được chọn là số nguyên tố

b. Số được chọn chia hết cho 3

Bài 29. Có 9 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 9. Chọn ngẫu nhiên ra 2 tấm thẻ. Tính xác suất để tích của hai số trên hai tấm thẻ là một số chẵn

Bài 30. Tìm xác suất để khi gieo con xúc xắc 6 lần độc lập, không lần nào xuất hiện mặt có số chấm là một số chẵn.

Bài 31. Một bình chứa 16 viên bi, trong đó có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đen, 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 10 viên bi. Tìm xác suất để rút được 5 viên bi trắng, 3 viên bi đen và 2 viên bi đỏ

Bài 32. Một đoàn tàu có 7 toa đỗ ở một sân ga. Có 7 hành khách từ sân ga lên tàu, mỗi người độc lập với nhau chọn một cách ngẫu nhiên lên một toa. Tìm xác suất để có một khách lên mỗi toa tàu.

Bài 33. Gieo 2 con súc sắc một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất của biến cố " Các mặt xuất hiện có số chấm bằng nhau"

Bài 34. Gieo ngẫu nhiên đồng thời 4 đồng xu. Tính xác suất để ít nhất hai đồng xu lật ngửa.

Bài 35. Một bình đựng 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ khác nhau về màu sắc. lấy ngẫu nhiên một viên bi, rồi lấy tiếp một viên bi nữa. Tính xác suất của biến cố: "lấy lần thứ hai được một viên bi xanh"

Bài 36. Hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 5 quả đỏ và 5 quả xanh, hộp thứ 2 chứa 4 quả đỏ và 6 quả xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một quả. Tính xác suất sao cho hai quả

a. đều đỏ b. cùng màu c. khác màu

Bài 37. Mọt hộp chứa 10 quả cầu đỏ được đánh số từ 1 đến 10 và 20 quả cầu xanh được đánh số từ 1 đến 20. Lấy ngẫu nhiên một quả. Tìm xác suất sao cho quả được chọn

a. có ghi số chẵn b. màu đỏ c. màu đỏ và ghi số chẵn d. màu xanh hoặc ghi số lẻ.

Bài 38. Một tổ có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên ba người. Tìm xác suất sao cho 3 người đó

a. đều là nữ b. không ai là nữ c. ít nhất một người là nữ d. có đúng một người nữ

## CẤP SỐ CỘNG

1. Định nghĩa: Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tổng của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi gọi là công sai. Gọi d là công sai, theo định nghĩa ta có: $u_{n+1} = u_n + d$ (n = 1, 2,. ..).
Khi d = 0 thì cấp số cộng có các số hạng đều bằng nhau.
2. Số hạng tổng quát CSC
Định lí: Số hạng tổng quát $u_n$ của một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1$ và công sai d được cho bởi công thức: $u_n = u_1 + (n - 1)d$
3. Tính chất các số hạng của cấp số cộng
Định lí: Trong một cấp số cộng, mỗi số hạng kể từ số hạng thứ hai (và trừ số hạng cuối cùng đối với cấp số cộng hữu hạn), đều là trung bình cộng của hai số hạng kề bên nó, tức là $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ $(k \geq 2)$.
4. Tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng
$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$
BÀI TẬP ÁP DỤNG
**Bài 1**. Xác định số hạng cần tìm trong mỗi cấp số cộng dưới đây:
a. 2, 5, 8,. .. Tìm $u_{15}$.
b. 15; 11; 7; 3; ... Tìm $u_{20}$.
**Bài 2**. Xác định cấp số cộng có công sai là 3, số hạng cuối là 12 và có tổng bằng 30.
**Bài 3**. Cho cấp số cộng $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$
Tìm số hạng đầu và công sai của nó.
**Bài 4**. Tìm cấp số cộng có 5 số hạng biết tổng là 25 và tổng các bình phương của chúng là 165.
**Bài 5**. Tìm 3 số tạo thành một cấp số cộng biết số hạng đầu là 5 và tích số của chúng là 1140.
**Bài 6**. Tìm chiều dài các cạnh của một tam giác vuông biết chúng tạo thành một cấp số cộng với công sai là 25.
**Bài 7**. Cho cấp số cộng $(u_n)$. Biết $u_1 + u_4 + u_7 + u_{10} + u_{13} + u_{16} = 147$. Tính $u_1 + u_6 + u_{11} + u_{16}$.
**Bài 8**. Một cấp số cộng $(a_n)$ có $a_3 + a_{13} = 80$. Tìm tổng $S_{15}$ của 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.
**Bài 9**. Một cấp số cộng có 11 số hạng. Tổng của chúng là 176. Hiệu của số hạng cuối và số hạng đầu là 30. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.
**Bài 10**. Cho cấp số cộng $(a_n)$ có $a_1 = 4$, $d = -3$. Tính $a_{10}$.
**Bài 11**. Tính $u_1$, d trong các cấp số cộng sau đây:
a. $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ S_{13} = 129 \end{cases}$ b. $u_5 = 19$; $u_9 = 35$ c. $S_4 = 9$; $S_6 = 45/2$ d. $\begin{cases} u_3 + u_{10} = -31 \\ 2u_4 - u_9 = 7 \end{cases}$
**Bài 12**. Cho cấp số cộng $(u_n)$ có $u_3 = -15$, $u_{14} = 18$. Tính tổng của 20 số hạng đầu tiên.
**Bài 13**. Cho cấp số cộng $(u_n)$ có $u_1 = 17$, $d = 3$. Tính $u_{20}$ và $S_{20}$.
**Bài 14**. Cho cấp số cộng $(u_n)$ có $a_{10} = 10$, $d = -4$. Tính $u_1$ và $S_{10}$.
**Bài 15**. Cho cấp số cộng $(u_n)$ có $u_6 = 17$ và $u_{11} = -1$. Tính d và $S_{11}$.
**Bài 16**. Cho cấp số cộng $(u_n)$ có $u_3 = -15$, $u_4 = 18$. Tìm tổng của 20 số hạng đầu tiên.
CẤP SỐ NHÂN
1. Định nghĩa: Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi gọi là công bội.
Gọi q là công bội, theo định nghĩa ta có
$u_{n+1} = u_n.q$ (n = 1, 2,. ..).
2. Số hạng tổng quát của CSN
Định lí: Số hạng tổng quát của một cấp số nhân được cho bởi công thức $u_n = u_1.q^{n-1}$.
3. Tính chất
Định lí: Trong một cấp số nhân, mỗi số hạng kể từ số hạng thứ hai (trừ số hạng cuối đối với cấp số nhân hữu hạn) đều có giá trị tuyệt đối là trung bình nhân của hai số hạng kề bên nó, tức là $|u_k| = \sqrt{u_{k-1}.u_{k+1}}$ với $k \geq 2$
4. Tổng n số hạng đầu của cấp số nhân với số hạng đầu $u_1$ và công bội $q \neq 1$ là $S_n = u_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ $(q \neq 1)$

Với $q = 1$, $S_n = nu_1$.

BÀI TẬP

**Bài 1**.

a. Tìm các số hạng của cấp số nhân có 6 số hạng biết $u_1 = 243$ và $u_6 = 1$.

b. Cho cấp số nhân có $q = 1/4$, $S_6 = 2730$. Tìm $u_1$ và $u_6$.

**Bài 2**. Cho cấp số nhân có $u_3 = 18$ và $u_6 = -486$. Tìm số hạng đầu tiên $u_1$ và công bội q của CSN đó.

**Bài 3**. Tìm $u_1$ và q của cấp số nhân biết: $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$

**Bài 4**. Tìm $u_1$ và q của cấp số nhân $(u_n)$ có: $u_3 = 12$, $u_5 = 48$.

**Bài 5**. Tìm u và q của cấp số nhân $(u_n)$ biết: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases}$

**Bài 6**. Tìm các số hạng của cấp số nhân $(u_n)$ biết cấp số đó có 4 số hạng có tổng bằng 360 và số hạng cuối gấp 9 lần số hạng thứ hai.

**Bài 7**. Tổng 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng là 21. Nếu số thứ hai trừ đi 1 và số thứ ba cộng thêm 1 thì ba số đó lập thành một cấp số nhân. Tìm ba số đó.

## GIỚI HẠN DÃY SỐ

A. Lý thuyết

+ Nếu $|u_n| < v_n$ với mọi n, $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$

+ $\lim u_n = L \rightarrow \lim|u_n| = |L|$

+ $\lim u_n = L \rightarrow \lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$

+ $\lim u_n = L$, $u_n > 0$ với mọi n $\rightarrow L > 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$

+ Với cấp số nhân mà $|q| < 1$ thì $S = \lim (u_1 + u_1q + u_1q^2 + ... + u_1q^{n-1}) = \lim \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{u_1}{1-q}$

+ $\lim |u_n| = +\infty \rightarrow \lim (1/u_n) = 0$

+ $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$

+ $\lim (1/n^k) = 0$ với $k > 0$

+ $\lim n^k = +\infty$ với mọi $k > 0$

+ $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$

+ $\lim u_n = L$ thì $\lim (k.u_n) = k.L$

+ $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ thì $\lim (u_n + v_n) = L + M$

+ $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ thì $\lim (u_n.v_n) = L.M$

+ $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M \neq 0$ thì $\lim (u_n/v_n) = L/M$

B. BÀI TẬP

**Bài 1**. Tìm các giới hạn

a. $\lim \dfrac{2n+1}{n+1}$ b. $\lim \dfrac{-3n^2 + 4n + 1}{2n^2 - 3n + 7}$ c. $\lim \dfrac{n^3 + 4n - 6}{5n^3 + 2n^2}$

d. $\lim \dfrac{n(2n+1)(3n+2)}{2n^3 + 1}$ e. $\lim \dfrac{3n+4}{n^2 - 2}$ f. $\lim \dfrac{n(n+1)}{(n+4)^3}$

**Bài 2**. Tìm các giới hạn

a. $\lim \dfrac{7 - 6\sqrt{n}}{2 + \sqrt{4n+5}}$ b. $\lim \dfrac{\sqrt[3]{n^3 - 8n} + 2n - 3}{\sqrt{n^2 - 2} + 2n - 5}$ c. $\lim \dfrac{n^2 + \sqrt[3]{n^3 + 1} + 2n}{n\sqrt{n^2+1} + 3}$

d. $\lim \dfrac{\sqrt{n^2 + 4}}{n - 2}$ e. $\lim \dfrac{\sqrt[3]{8n^3 + 27n^2 - 64}}{\sqrt{4n^2 - 4n + 5}}$

**Bài 3**. Tìm các giới hạn

a. $\lim(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n+1})$ b. $\lim(\sqrt{n^2 + 5n + 1} - \sqrt{n^2 - n})$

c. $\lim(\sqrt{3n^2 + 2n} - \sqrt{3n^2 - 4n + 8})$ d. $\lim(\sqrt{n^2 - 4n} - n)$

e. $\lim(n - \sqrt{n^2 + 3n})$ f. $\lim(\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n)$

g. $\lim(\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1})$ h. $\lim(\sqrt[3]{n^3 - 3n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 4n})$

**Bài 4**. Tìm các giới hạn

a. $\lim\frac{1-4^n}{1+4^n}$  b. $\lim\frac{3^n-4^{n+1}}{3^{n+2}+4^n}$  c. $\lim\frac{3^n-4^n+5^n}{3^n+4^n-5^n}$  d. $\lim\frac{2^{2n+3}-3^n}{2^{2n}+3^{n+1}}$

**Bài 5**. Tìm các giới hạn

a. $\lim\frac{\sin 2n}{n+1}$  b. $\lim\frac{\sin 10n+\cos 10n}{n^2+2n}$  c. $\lim\frac{(-1)^n(n+2)}{n^2}$

**Bài 6**. Tìm các giới hạn

a. $\lim\frac{1+3+...+(2n+1)}{3n^2+4}$  b. $\lim\frac{1+2+3+4+...+n}{n^2-3}$  c. $\lim[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}]$

## GIỚI HẠN HÀM SỐ

A. Lý thuyết

+ $\lim\limits_{x\to x_o} x = x_o$ với mọi $x_o$.  + $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{1}{x})=0$

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ với $k>0$  + $\lim\limits_{x\to x_o}[cf(x)]=c\lim\limits_{x\to x_o}f(x)$

+ $\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_o}f(x)+\lim\limits_{x\to x_o}g(x)$  + $\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)g(x)\right]=\lim\limits_{x\to x_o}f(x).\lim\limits_{x\to x_o}g(x)$

+ $\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=L, \lim\limits_{x\to x_o}g(x)=M\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_o}[\frac{f(x)}{g(x)}]=\frac{L}{M}$

B. Bài tập

**Bài 1**. Tính các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x)$  b. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-2x+1}{x^2+2x-1}$  c. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x-3}$  d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-9x}{x^2+4}$

**Bài 2**. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+2x)$  b. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+2x)$

**Bài 3**. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2+3x+1}{2x^2+3}$  b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^4+5x^2+1}{2x^4+3}$  c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{2x^3+5}$  d. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+1}{2x^3+5}$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+2}{x+1}$  g. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x}$  h. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{3x-1}$  i. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x+3\sqrt{x^4-5x^2}}{2x^2+4x-5}$

k. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}+4x-1}{\sqrt{4x^2+1}-x}$  ℓ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x-\sqrt{4x^2+2x}}{x+1}$

**Bài 4**. Tìm các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+2x-5}{(x-3)^2}$  b. $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{5x+2}{x-3}$  c. $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2+5x+2}{x-2}$

**Bài 5**. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^2+3x-1, & x\geq 2\\ 3x+7, & x<2\end{cases}$. Tìm các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$  b. $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$  c. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

**Bài 6**. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<1\\ 5x+4, & x\geq 1\end{cases}$. Tính các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$  b. $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$  c. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

**Bài 7**. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{x-3}$  b. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$  c. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$  d. $\lim\limits_{x\to a}\frac{8x^3-27}{4x^2-9}$

e. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^5+1}{x^3+1}$  f. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^6-5x^5+x}{(1-x)^2}$  g. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$  h. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$

i. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{7+x}}{x^2-2x}$ j. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}+2}{x+2}$ k. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+4}-x}{x^2-4}$

**Bài 8**. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{3x}$ b. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ c. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ d. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x}-1}$

e. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x-8}+\sqrt{4-x}}{x}$ g. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+9}-5}{x}$ h. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{(x-1)^2}$

**Bài 9**. Tìm các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+4x-2}-x)$ b. $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3})$

c. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x+1})$ d. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{8x^3+x}-2x)$

e. $\lim\limits_{x\to +\infty}[x^2(\sqrt[3]{x^3+1}-x)]$ f. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt[3]{x^3+5x^2}-\sqrt[3]{x^3+8x})$

**Bài 10**. Tìm các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$ b. $\lim\limits_{x\to 1}[\dfrac{1}{x-1}(1-\dfrac{2}{x+1})]$ c. $\lim\limits_{x\to 2}(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x^2-2x})$

## HÀM SỐ LIÊN TỤC

**Bài 1**. Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_o$.

a. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5} & x\neq 5\\ 9 & x=5\end{cases}$ tại $x_o = 5$ b. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & x>5\\ \dfrac{3}{2} & x\le 5\end{cases}$ tại $x_o = 5$

c. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{2x-3}}{2-x} & x>2\\ 1 & x\le 2\end{cases}$ tại $x_o = 2$ d. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & x\neq 2\\ \dfrac{1}{4} & x=2\end{cases}$ tại $x_o = 2$

**Bài 2**. Chứng minh các hàm số sau liên tục trên R

a. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1} & x\neq 1\\ 4 & x=1\end{cases}$ b. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+3x+4}{x^3+1} & x\neq -1\\ x+3 & x=-1\end{cases}$

**Bài 3**. Tìm a để hàm số

a. $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<1\\ (2a-3)x & x\ge 1\end{cases}$ liên tục tại $x_o = 1$ b. $f(x)=\begin{cases}a^2x^2 & x\le 2\\ (1-4a)x & x>2\end{cases}$ liên tục tại $x_o = 2$

**Bài 4**. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^3+2x^2-5 & x\ge 0\\ 4x-1 & x<0\end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số trên tập xác định.

**Bài 5**. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_o$.

a. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4} & x\neq 2\\ a & x=2\end{cases}$ tại $x_o = 2$ b. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4-3x}-1}{x-1} & x<1\\ a+x & x\ge 1\end{cases}$ tại $x_o = 1$

**Bài 6**. Chứng minh rằng phương trình $x^3 + 3x^2 + 5x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong (0; 1)

**Bài 7**. Chứng minh phương trình $x^3 - 3x + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

**Bài 8**. Chứng minh phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm phân biệt trong khoảng (–2; 5)

**Bài 9**. Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm

a. $x^3 + mx^2 - 3x - 4m = 0$ b. $m(2x^2 - 3x + 1) + 4x - 3 = 0$.

**Bài 10**. Chứng minh rằng các phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt

a. $x^3 - 3x + 1 = 0$ b. $x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = 0$

## ĐẠO HÀM

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm
+ Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) và $x_o$ thuộc (a; b)

$$f'(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \lim_{x \to x_o} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

+ Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm tại $x_o$ thì nó liên tục tại điểm đó.
2. Ý nghĩa của đạo hàm
+ $f'(x_o)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại M ($x_o$; $f(x_o)$).
+ Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại M ($x_o$; $f(x_o)$) là $y = f'(x_o)(x - x_o) + y_o$.
3. Qui tắc tính đạo hàm
+ $(C)' = 0$; $x' = 1$; $(x^n)' = n.x^{n-1}$ với mọi số thực n
+ $(u + v)' = u' + v'$; $(u.v)' = u'.v + v'.u$; $(u / v)' = (u'v - v'u) / v^2$; $(ku)' = ku'$; $(1/v)' = -v' / v^2$ $(v \neq 0)$
+ Đạo hàm của hàm số hợp: Nếu u = g(x) có đạo hàm tại x là u′ (x) và hàm số y = f(u) có đạo hàm tại u là f′(u) thì hàm số hợp y = f(g(x)) có đạo hàm tại x là y′ = f′(u).u′(x)
4. Đạo hàm của hàm số lượng giác
+ Giới hạn cơ bản $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ + $\lim_{x \to x_o} u(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_o} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$

+ $(\sin x)' = \cos x$ + $(\cos x)' = -\sin x$ + $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ + $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5. Vi phân
+ $dy = y'dx$ + $f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + f'(x).\Delta x$
6. Đạo hàm cấp cao $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$ với $n \geq 2$
VẤN ĐỀ 1: Tính đạo hàm bằng định nghĩa
Để tính đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm $x_o$ bằng định nghĩa ta thực hiện các bước
Bước 1: Giả sử $\Delta x$ là số gia của đối số tại $x_o$. Tính $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$
Bước 2: Tính $\lim_{x \to x_o} \frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_o)$

**Bài 1**. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau tại điểm được chỉ ra:
a. $y = f(x) = 2x^2 - x + 2$ tại $x_o = 1$ b. $y = f(x) = \sqrt{3 - 2x}$ tại $x_o = -3$
c. $y = f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$ tại $x_o = -1$. d. $y = f(x) = \sin x$ tại $x_o = \pi/6$
e. $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ tại $x_o = 1$ f. $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ tại $x_o = 0$

**Bài 2**. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau
a. $y = f(x) = x^2 - 3x + 1$ b. $y = f(x) = x^3 - 2x$
c. $y = f(x) = \sqrt{x + 1}$ trên $(-1; +\infty)$ d. $y = f(x) = \sin x$
e. $y = f(x) = \frac{1}{2x - 3}$ với $x \neq 3/2$ f. $y = f(x) = \frac{1}{\cos x}$ trên $(0; \pi/2)$

VẤN ĐỀ 2: Tính đạo hàm bằng công thức
**Bài 1**. Tính đạo hàm của các hàm số sau:
a. $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$ b. $y = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{3}x\sqrt{x}$ c. $y = (x^3 - 2)(1 - x^2)$
d. $y = x^2(x^2 - 1)(x^2 - 4)$ e. $y = \frac{3}{x + 2} + x - 2$ f. $y = \frac{2x + 1}{1 - 3x}$
g. $y = \frac{2x^2 - 4x + 7}{x + 1}$ h. $y = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$

**Bài 2**. Tính đạo hàm của các hàm số sau
a. $y = (x^2 + x + 1)^3$ b. $y = (1 - 2x^2)^5$. c. $y = \frac{1}{(x^2 + 2x + 5)^2}$
d. $y = \frac{(x + 2)^2}{(2x - 1)^3}$ e. $y = (2 - 3/x^2)^3$ f. $y = (\frac{2x + 1}{x - 1})^4$

**Bài 3**. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a. $y = \sqrt{2x^2 - 5x}$ b. $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ c. $y = (x^2 - 2)\sqrt{x^2 + 2x + 3}$

d. $y = (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^3$ e. $y = \sqrt{1 + \dfrac{x^3}{x+1}}$ f. $y = \dfrac{\sqrt{4x + x^2}}{x+1}$

**Bài 4**. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a. $y = (\dfrac{\sin x}{1+\cos x})^2$ b. $y = x\cos x - \sin x$ c. $y = \tan^3 2x - 3x$

d. $y = \sqrt{2 + \cos^2 2x}$ e. $y = \sin^2(2x - \pi/3)$ f. $y = \sin(\tan x)$

g. $y = \dfrac{x+2}{x^2 - x + 1}$ h. $y = \sin 3x \tan 2x$

**Bài 5**. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

a. $(\sin^n x.\cos nx)' = n\sin^{n-1} x\cos(n+1)x$ b. $(\sin^n x.\sin nx)' = n\sin^{n-1} x\sin(n+1)x$

c. $(\cos^n x.\sin nx)' = n\cos^{n-1} x\cos(n+1)x$ d. $(\cos^n x.\cos nx)' = -n\cos^{n-1} x\sin(n+1)x$

VẤN ĐỀ 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số

1. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_o; f(x_o))$ là $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$
2. Viết phương trình tiếp tuyến (d) với (C), biết (d) đi qua điểm $A(x_1; y_1)$ cho trước

Cách thứ 1:

+ Đường thẳng (d) đi qua điểm A có hệ số góc k có dạng (d): $y = k(x - x_1) + y_1$.

+ Đường thẳng (d) và đồ thị (C) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} k = f'(x) \\ k(x - x_1) + y_1 = f(x) \end{cases} \quad (1)$$

+ Giải hệ phương trình (1) với ẩn là x suy ra k. Từ đó viết phương trình (d).

Cách thứ 2:

+ Gọi tiếp điểm là $M(x_o; f(x_o))$

+ Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_o; f(x_o))$ có dạng là $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$

+ Tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_1; y_1) \Leftrightarrow y_1 = f'(x_o)(x_1 - x_o) + f(x_o)$

+ Giải phương trình theo ẩn $x_o$. Viết phương trình tiếp tuyến.

3. Viết phương trình tiếp tuyến (d) với (C) song song với đường thẳng (Δ): $y = ax + b$

+ Gọi tiếp điểm là $M(x_o; f(x_o))$

+ Hệ số góc tiếp tuyến là $k = f'(x_o) = a$

+ Tìm $x_o$, sau đó viết phương trình tiếp tuyến

4. Viết phương trình tiếp tuyến (d) với (C) vuông góc với đường thẳng (Δ): $y = ax + b$

+ Gọi tiếp điểm là $M(x_o; f(x_o))$

+ Hệ số góc tiếp tuyến là $k = f'(x_o) = -1/a$

+ Tìm $x_o$, sau đó viết phương trình tiếp tuyến

**Bài 1**. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ với đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C):

a. Tại điểm thuộc (C) có hoành độ $x_o = 1$.

b. Song song với đường thẳng (Δ) $4x - 2y + 5 = 0$.

c. Vuông góc với đường thẳng (Δ) $x + 4y = 0$.

d. Vuông góc với đường phân giác thứ nhất của góc hợp bởi các trục tọa độ.

**Bài 2**. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2 - x + x^2}{x - 1}$ có đồ thị (C)

a. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(2; 4).

b. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc k = 1.

**Bài 3**. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{3x + 1}{1 - x}$ với đồ thị (C)

a. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A(2; –7).

b. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

c. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

d. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng (Δ) $y = (1/2)x + 2$

e. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (Δ): $2x + 2y - 5 = 0$.

**Bài 4**. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2$ với đồ thị (C)
a. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $I(1; -2)$.
b. Chứng minh rằng các tiếp tuyến khác của đồ thị(C) không đi qua I.

**Bài 5**. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{1 - x - x^2}$ với đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C)
a. Tại điểm có hoành độ $x_o = 1/2$.
b. Song song với đường thẳng $(\Delta)$: $x + 2y = 0$.

VẤN ĐỀ 4: Tính đạo hàm cấp cao

**Bài 1**. Cho hàm số $f(x) = 3(x + 1)\cos x$.
a. Tính $f'(x)$, $f''(x)$ b. Tính $f''(\pi/2)$, $f''(0)$, $f''(\pi)$

**Bài 2**. Tính đạo hàm của các hàm số đến cấp ba
a. $y = \cos x$ b. $y = 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6$ c. $y = x\sin x$
d. $y = \dfrac{x-3}{x+4}$ e. $y = \tan x$ f. $y = \dfrac{1}{1-x}$

**Bài 3**. Cho n là số nguyên dương. Chứng minh các công thức đạo hàm cấp n sau
a. $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ b. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ c. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

**Bài 4**. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:
a. $y = \dfrac{1}{x+4}$ b. $y = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2}$ c. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
d. $y = \dfrac{1-x}{x+1}$ e. $y = \sin^2 x$ f. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

**Bài 5**. Chứng minh các hệ thức sau với các hàm số được chỉ ra
a. $xy'' + 2(y' - \sin x) + xy = 0$, $y = x\sin x$ b. $y^3y'' + 1 = 0$, $y = \sqrt{2x - x^2}$
c. $x^2y'' - 2(x^2 + y^2)(1 + y) = 0$, $y = x\tan x$ d. $2(y')^2 = 2(y - 1)y''$, $y = (x - 3) / (x + 4)$

VẤN ĐỀ 5: Tính giới hạn hàm số lượng giác

**Bài 1**. Tính các giới hạn
a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$ c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$

**Bài 2**. Tính các giới hạn
a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\sin x-\cos x}{1+\sin x-\cos x}\right)$ b. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{4-4\sin x}{(\pi-2x)^2}$ c. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x$ d. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)}{1-2\cos x}$

VẤN ĐỀ 6: Các bài toán khác

**Bài 1**. Giải phương trình $f'(x) = 0$ với
a. $f(x) = 3\cos x - 4\sin x + 5x$ b. $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x + 2x - 1$
c. $f(x) = \sin^2 x + 2\cos x$ d. $f(x) = \sin x - (1/4)\cos 4x - (1/6)\cos 6x$
e. $f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2\cos(x/2 + 3\pi/2)$ f. $f(x) = \sin 3x + 3\cos x - (\cos 3x + \sin x)\sqrt{3}$

**Bài 2**. Giải phương trình $f'(x) = g(x)$ với
a. $f(x) = \sin^4 3x$ & $g(x) = \sin 6x$ b. $f(x) = \sin^3 2x$, $g(x) = 4\cos 2x - 5\sin 4x$
c. $f(x) = 2x^2\cos^2(x/2)$, $g(x) = x - x^2\sin x$ d. $f(x) = 4x\cos^2(x/2)$, $g(x) = 8\cos(x/2) - 3 - 2x\sin x$

**Bài 3**. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ với
a. $f(x) = x^3 + x$; $g(x) = 3x^2 + x - 4$ b. $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - 2x - 8}$; $g(x) = 1 - 3x$
c. $f(x) = 4x^3 - 3x^2$; $g(x) = 2x^3 - 6$ d. $f(x) = 2/x$, $g(x) = x - x^3$

**Bài 4**. Xác định m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x thuộc R
a. $f'(x) > 0$, $f(x) = mx^3/3 - 3x^2 + mx - 5$ b. $f'(x) < 0$, $f(x) = 2mx^3 - 3mx^2 + 6(m + 1)x + 9$

**Bài 5**. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx - 3$. Tìm các giá trị của m sao cho
a. y’ = 0 có nghiệm kép. b. $y' \geq 0$ với mọi x.

**Bài 6**. Cho hàm số $y = -2mx^3 + 3mx^2 - 6(3 - m)x + 12$. Tìm m sao cho
a. $y' < 0$ với mọi x.

b. phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt cùng dấu. Tìm hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.

## BÀI TẬP ÔN ĐẠO HÀM

**Bài 1**. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = x^3 (x^2 - 4)$ b. $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$ c. $y = (\sqrt{x} + 1)(2x^2 + 3)$

d. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 3}$ e. $y = \frac{1}{(2x+1)^2}$ f. $y = (5 - 4x^2)^3$

**Bài 2**. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ b. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ c. $y = \sqrt{\frac{x - 3x^2}{x^2}}$

**Bài 3**. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = (x + 2) \sin x$ b. $\tan^2 3x$ c. $y = x \sin 2x + \cos 2x$

d. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ e. $y = \sqrt{\cos 2x + 2}$ f. $y = \sin 2x \cos^3 x$

**Bài 4**. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của các hàm số, với:

a. $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm M(–1, –2)

b. $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ tại điểm có hoành độ $x_o = 0$

c. $y = \sqrt{2x + 1}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến là k = 1/3

**Bài 5**. Cho hàm số $y = x^3 - 5x^2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến

a. Song song với đường thẳng y = –3x + 1

b. Vuông góc với đường thẳng y = (1/7)x – 4

c. Đi qua điểm A(0; 2).

**Bài 6**. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Tính giá trị của $f'(\pi/6)$, $f'(\pi/3)$.

**Bài 7**. Tìm m để $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc R

a. $f(x) = x^3 + (m - 1)x^2 + 2x + 1$ b. $f(x) = 3\sin x - 3m \sin 2x - \sin 3x + 6mx$

**Bài 8**. Chứng minh rằng $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc R

a. $f(x) = 2x + \sin x$ b. $f(x) = (2/3)x^9 - x^6 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$

## PHẦN II. HÌNH HỌC

## BÀI TẬP PHÉP BIẾN HÌNH

**Bài 1**. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm M(3; 2). Tìm tọa độ điểm M' là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2; 1)$

**Bài 2**. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A(4; 5). Tìm điểm B sao cho A là ảnh của điểm B qua phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (2; 1)$.

**Bài 3**. Trong mặt phẳng Oxy Cho điểm M(2; 3). Phép đối xứng qua trục Ox biến điểm M thành M'. Tìm tọa độ điểm M'.

**Bài 4**. Trong mặt phẳng cho đường thẳng d có phương trình: x + y – 5 = 0. Tìm ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v} = (1; 1)$.

**Bài 5**. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình: 3x + 5y – 4 = 0. Tìm ảnh d' của d qua phép đối xứng trục Ox.

**Bài 6**. Trong mặt phẳng Oxy cho diểm M (2; 3). Phép đối xứng qua gốc tọa độ biến điểm M thành điểm N. Tìm tọa độ điểm N.

**Bài 7**. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình x + y – 5 = 0, phép đối xứng qua gốc tọa độ biến d thành d'. Tìm phương trình d'.

**Bài 8**. Trong mặt phẳng cho đường tròn (C) có phương trình $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 36$. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1; 2)$ biến (C) thành (C'). Tìm phương trình (C')

**Bài 9**. Trong mặt phẳng cho đường tròn (C) có phương trình $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$. Phép đối xứng qua gốc tọa độ biến (C) thành (C'). Tìm phương trình (C').

**Bài 10**. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$. Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua gốc tọa độ và phép tịnh tiến $\vec{v} = (1; 4)$ biến (C) thành (C’’). Tìm phương trình của (C’’).
**Bài 11**. Cho hình vuông ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Thực hiện phép quay tâm O biến hình vuông ABCD thành chính nó. Tìm số đo của góc quay đó.
**Bài 12**. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M(–2; 4). Phép vị tự tâm O tỉ số k = –2 biến điểm M thành điểm N. Tìm tọa độ điểm N.
**Bài 13**. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x + y - 4 = 0$. Phép vị tự tâm O tỉ số k = 3 biến d thành đường thẳng d’. Tìm phương trình d’.
**Bài 14**. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình: $(x-1)^2 + y^2 = 16$. Phép vị tự tâm O tỉ số k = 2 biến (C) thành đường tròn (C’). Tìm phương trình (C’).
**Bài 15**. Cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Phép đồng dạng bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số k = 3 và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1; 2)$ biến (C) thành (C’). Viết phương trình (C’).
**Bài 16**. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình: $x + y + 2 = 0$. Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số 1/2 và phép đối xứng qua trục ox biến d thành d’. Tìm phương trình d’.

## BÀI TẬP HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Vấn đề 1: Tìm giao TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG
Muốn tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) ta đi tìm hai điểm chung A; B của (P) và (Q). Khi đó (P) ∩ (Q) = AB.
**Bài 1**. Cho tứ diện ABCD có E là trung điểm của AB. Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng (ECD) với các mặt phẳng (ABC); (ABD); (BCD); (ACD).
**Bài 2**. Cho tứ diện SABC và một điểm I trên đoạn SA; d là đường thẳng trong (ABC) cắt AB; BC tại J; K. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (I, d) với các mặt phẳng sau: (SAB); (SAC); (SBC)
**Bài 3**. Cho tứ giác lồi ABCD và điểm S không nằm trong mặt phẳng chứa tứ giác. Tìm giao tuyến của
a. (SAC) và (SBD) b. (SAB) và (SCD) c. (SAD) và (SBC)
**Bài 4**. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi; M là điểm trên cạnh CD. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng
a. (SAM) và (SBD) b. (SBM) và (SAC)
**Bài 5**. Cho tứ diện ABCD; M là điểm nằm trong ΔABC; N là điểm nằm trong ΔACD. Tìm giao tuyến của
a. (AMN) và (BCD) b. (CMN) và (ABD)
**Bài 6**. Cho tứ diện ABCD. M nằm trên AB sao cho AM = MB / 4; N nằm trên AC sao cho AN = 3NC; điểm I nằm trong ΔBCD. Tìm giao tuyến của:
a. (MNI) và (BCD) b. (MNI) và (ABD) c. (MNI) và (ACD)
**Bài 7**. Cho tứ diện ABCD; gọi I; J lần lượt là trung điểm của AD; BC.
a. Tìm giao tuyến của: (IBC) và (JAD)
b. M là điểm trên AB; N là điểm trên AC. Tìm giao tuyến của (IBC) và (DMN)
**Bài 8**. Cho hai đường thẳng a; b trong mặt phẳng (P) và điểm S không thuộc (P). Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng chứa a và S với mặt phẳng chứa b và S.
**Bài 9**. Cho tứ diện ABCD; trên AB; AC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho: AM / MB ≠ AN / NC. Tìm giao tuyến của (DMN) và (BCD).
**Bài 10**. Trong mặt phẳng (P) cho hình thang ABCD có đáy là AB; CD; S là điểm nằm ngoài mặt phẳng hình thang. Tìm giao tuyến của
a. (SAD) và (SBC) b. (SAC) và (SBD)
**Bài 11**. Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang hai đáy là AD; BC. Gọi M; N là trung điểm AB; CD và G là trọng tâm ΔSAD. Tìm giao tuyến của
a. (GMN) và (SAC) b. (GMN) và (SBC)
Bài 12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD không phải hình thang. Tìm các giao tuyến
a. (SAC) ∩ (SBD) b. (SAB) ∩ (SCD) c. (SAD) ∩ (SBC)
VẤN ĐỀ 2: CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG VÀ BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY
**Bài 1**. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d. Trên (P) lấy hai điểm A; B nhưng không nằm trên d. O là điểm ở ngoài hai mặt phẳng. Các đường thẳng OA; OB lần lượt cắt (Q) tại A’; B’. AB cắt d tại C. Chứng minh A’, B’, C’ thẳng hàng.

**Bài 2**. Trong không gian cho ba tia Ox; Oy; Oz không đồng phẳng. Trên Ox lấy A; A’; trên Oy lấy B; B’ trên Oz lấy C; C’ sao cho AB cắt A’B’ tại D; BC cắt B’C’ tại E; AC cắt A’C’ tại F. Chứng minh D; E; F thẳng hàng.
**Bài 3**. Cho A; B; C không thẳng hàng ở ngoài mặt phẳng (P). Gọi M; N; P lần lượt là giao điểm AB; BC; AC với (P). Chứng minh M; N; P thẳng hàng.
**Bài 4**. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành; O là giao điểm hai đường chéo; M; N lần lượt là trung điểm SA; SD. Chứng minh ba đường thẳng SO; BN; CM đồng quy.
**Bài 5**. Cho tứ diện ABCD. Mặt phẳng (P) không song song AB cắt AC; BC; AD; BD lần lượt tại M; N; R; S. Chứng minh AB; MN; RS đồng quy.
**Bài 6**. Chứng minh trong một tứ diện các đường thẳng nối đỉnh với trọng tâm mặt đối diện đồng quy.
**Bài 7**. Cho tứ diện ABCD. Lấy hai điểm M, N lần lượt trên cạnh AB, AC sao cho MN không song song với BC. Dựng mặt phẳng (α) đi qua M, N sao cho (α) cắt CD, BD lần lượt tại H, G.
a. Chứng minh rằng HG luôn đi qua một điểm cố định khi mặt phẳng (α) di động nhưng M, N cố định.
b. Tìm quỹ tích giao điểm $I = MH \cap NG$.
Vấn đề 3: TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG
**Bài 1**. Cho tứ diện ABCD có M là trung điểm AB, N và P lần lượt là các điểm nằm trên AC, AD sao cho AN / AC = 3 / 4, AP / AD = 2 / 3.
a. Tìm giao điểm MN với (BCD)
b. Tìm giao điểm BD với (MNP)
c. Gọi Q là trung điểm NP. Tìm giao điểm của MQ với (BCD)
**Bài 2**. Cho tứ diện ABCD. Gọi M; N lần lượt là trung điểm của AC; BC. Trên đoạn BD lấy P sao cho BP = 2PD. Tìm giao điểm của CD với (MNP) và của AD với (MNP)
**Bài 3**. Cho hình chóp S.ABC có O là điểm trong ΔABC; D và E là các điểm năm trên SB; SC. Tìm giao điểm của DE với (SAO) và của SO với (ADE)
**Bài 4**. Cho tứ diện SABC. I; H lần lượt là trung điểm SA; AB. Trên đoạn SC lấy điểm K sao cho CK = 3KS.
a. Tìm giao điểm của đường thẳng BC với (IHK).
b. Gọi M là trung điểm HI. Tìm giao điểm của đường thẳng KM với (ABC).
**Bài 5**. Cho hình chóp SABCD đáy là hình thang ABCD đáy lớn AB. I; J; K là ba điểm trên SA; SB; SC. Tìm giao điểm IK và (SBD); giao điểm (IJK) và SD; SC.
**Bài 6**. Gọi I; J lần lượt là hai điểm nằm trong ΔABC; ΔABD của tứ diện ABCD. M là điểm tuỳ ý trên CD. Tìm giao điểm IJ và mặt phẳng (AMB)
**Bài 7**. Hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành ABCD. M là trung điểm SD
a. Tìm giao điểm I của BM và (SAC). Chứng minh: BI = 2IM.
b. Tìm giao điểm J của của SA và (BCM). Chứng minh J là trung điểm SA.
c. N là điểm tùy ý trên BC. Tìm giao điểm của MN với (SAC).
Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC.
a. Xác định $I = AN \cap (SBD)$ và $K = MN \cap (SBD)$
b. Tính các tỉ số IN/IA; KM/KN; IB/IK
Bài 9. Cho hình chóp S.ABC. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB. Trên đoạn SC lấy điểm K sao cho CK = 3KS.
a. Tìm giao điểm của BC và mặt phẳng (IHK).
b. Gọi M là trung điểm của IH. Tìm giao điểm của KM và mặt phẳng (ABC)
Bài 10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Một mặt phẳng (P) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC tại A’, B’, C’.
a. Dựng giao điểm D của mặt phẳng (P) với SD.
b. Gọi I là giao điểm của A’C’ và SO. Chứng minh rằng SA/SA’ + SC/SC’ = 2SO/SI.
c. Chứng minh SA/SA’ + SC/SC’ = SB/SB’ + SD/SD’.
Vấn đề 4: THIẾT DIỆN TẠO BỞI MẶT PHẲNG VỚI KHỐI ĐA DIỆN
**Bài 1**. Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’. Gọi M; N; P lần lượt là trung điểm của AA’; AD; DC. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình lập phương.
**Bài 2**. Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’. Gọi M; N; P lần lượt là trung điểm DC; AD; BB’. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình hộp.

**Bài 3**. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình bình hành. Gọi E; F; K lần lượt là trung điểm của SA; AB; BC. Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng đi qua ba điểm E; F; K.

**Bài 4**. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi A'; B'; C' lần lượt là các điểm nằm trên SA; SB; SC. Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (A'B'C') với hình chóp.

**Bài 5**. Cho tứ diện ABCD; điểm I nằm trên BD và ở ngoài BD sao cho ID = 3IB; M; N là hai điểm thuộc cạnh AD; DC sao cho 2MA = MD; 2ND = NC.

a. Tìm giao tuyến PQ của (IMN) với (ABC).

b. Xác dịnh thiết diện tạo bởi (IMN) với tứ diện.

c. Chứng minh MN; PQ; AC đồng qui.

**Bài 6**. Cho tứ diện ABCD; điểm I; J lần lượt là trọng tâm ΔABC; ΔDBC; M là trung điểm AD. Tìm tiết diện tạo bởi (MJI) và tứ diện.

**Bài 7**. Cho hình chóp S.ABCDE. Lấy ba điểm M; N; K lần lượt trên SA; BC; SD. Xác định thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNK) với hình chóp.

**Bài 8**. Hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình thang với AB là đáy. Gọi M; N là trung điểm SB; SC.

a. Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC).

b. Tìm giao điểm của SD với mặt phẳng (AMN).

c. Tìm tiết diện tạo bởi mặt phẳng (AMN) với hình chóp

**Bài 9**. Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SC.

a. Tìm giao điểm I của AM với (SBD). Chứng minh IA = 2IM.

b. Tìm giao điểm F của SD với (AMB). Chứng minh F là trung điểm SD.

c. Xác định hình dạng tiết diện tạo bởi (AMB) với hình chóp

d. Gọi N là một điểm trên cạnh AB. Tìm giao điểm của MN với (SBD).

**Bài 10**. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M; N; P lần lượt là trung điểm SB; SD; OC.

a. Tìm giao tuyến của (MNP) với (SAC).

b. Dựng thiết diện của (MNP) với hình chóp.

c. Tính tỉ số mà (MNP) chia cạnh SA; BC; CD.

**Bài 11**. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành; gọi M là trung điểm SB; G là trọng tâm ΔSAD

a. Tìm giao điểm I của GM với (ABCD).

b. Chứng minh (CGM) chứa đường thẳng CD.

c. Chứng minh (CGM) đi qua trung điểm SA.

d. Dựng thiết diện của (CGM) với hình chóp.

**Bài 12**. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi I; J lần lượt là trọng tâm ΔSAB; ΔSAD.

a. Tìm giao điểm của JI với (SAC).

b. Dựng thiết diện tạo bởi (JIO) với hình chóp.

**Bài 13**. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi I; M; N là ba điểm trên SA; AB; CD.

a. Tìm giao tuyến của (SAN) và (SDM).

b. Hãy xác định thiết diện tạo bởi (IMN) với hình chóp.

**Bài 14**. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi F là trung điểm CD; E là điểm trên cạnh SC sao cho SE = 2EC. Tìm tiết diện tạo bởi (AEF) với hình chóp.

**Bài 15**. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD không phải hình thang. Gọi F là trung điểm SC; E là điểm trên cạnh BC sao cho BE = 2EC.

a. Tìm tiết diện tạo bởi mặt phẳng (AEF) với hình chóp.

b. Tìm giao điểm của SB với mặt phẳng (AEF).

Bài 16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh CB, CD. Gọi M là điểm trên cạnh SA. Dựng thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MHK) và hình chóp.

Vấn đề 5: HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VÀ ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

**Bài 1**. Cho tứ diện ABCD có I, J là trọng tâm ΔABC, ΔABD. Chứng minh rằng: I J // CD

**Bài 2**. Cho hình chóp S. ABCD có đáy hình thang đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SB.

a. Chứng minh rằng: MN // CD

b. Tìm giao điểm P của SC và (AND)

c. AN cắt DP tại I . Chứng minh rằng: SI // AB // CD. Tứ giác SABI là hình gì?

**Bài 3**. Cho hình chóp S. ABCD có đáy là hình bình hành, có M, N, P, Q lần lượt nằm trên BC, SC, SD, AD sao cho MN // SB, NP // CD, MQ // CD.
a. Chứng minh rằng: PQ // SA
b. Gọi K là giao điểm MN và PQ. Chứng minh rằng: SK // AD // BC
**Bài 4**. Cho hình chóp S. ABCD có đáy là hình bình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm BC, CD, SB, SD.
a. Chứng minh rằng: MN // PQ
b. Gọi I là trọng tâm ΔABC, J thuộc SA sao cho JS / JA = 1/2. Chứng minh rằng: I J // SM
**Bài 5**. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình bình hành.
a. Tìm giao tuyến của (SAD) & (SBC); (SAB) & (SCD)
b. Lấy M thuộc SC. Tìm giao điểm N của SD và (ABM). Tứ giác ABMN là hình gì?
**Bài 6**. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình bình hành. Gọi M, H, K lần lượt là trung điểm AD, SA, SB.
a. Tìm giao tuyến d của (SAD) và (SBC)
b. Tìm giao tuyến của (SCD) và (MHK)
c. Tìm giao điểm N của BC và (MHK). Tứ giác MHKN là hình gì?
**Bài 7**. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình thang (AB đáy lớn). Gọi I, H, K là trung điểm AD, BC, SB.
a. Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD); (SCD) và (IHK)
b. Tìm các giao điểm M = SD ∩ (IHK); N = SA ∩ (IHK)
c. Xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi (IHK). Thiết diện là hình gì?
**Bài 8**. Cho hình chóp S. ABCD, đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P là trung điểm SB, BC, SD
a. Tìm giao tuyến của (SCD) và (MNP)
b. Tìm giao điểm của CD và (MNP), của AB và (MNP)
c. Tìm giao tuyến của (SAC) và (MNP), suy ra thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).
**Bài 9**. Cho hình chóp S.ABCD, có ABCD là hình thang với hai đáy AD và BC (AD > BC). Gọi M, E, F là trung điểm AB, SA, SD.
a. Tìm giao tuyến (MEF) và (ABCD).
b. Tìm giao điểm BC và (MEF)
c. Tìm giao điểm SC và (MEF)
d. Gọi O = AC ∩ BD. Tìm giao điểm SO và (MEF).
**Bài 10**. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm OB, SO, BC.
a. Tìm giao tuyến (NPO) và (SCD); (SAB) và (AMN)
b. Tìm giao điểm E của SA và (MNP)
c. Chứng minh rằng: ME // PN
d. Tìm giao điểm MN và (SCD) và xác định thiết diện hình chóp với mặt phẳng (MNP)
**Bài 11**. Cho hình chóp S.ABC. Gọi M, N, P là trung điểm AB, BC, SC. Cho SB = AC.
a. Tìm giao điểm E của SA và (MNP)
b. Chứng minh NP // ME // SB. Tứ giác MNPE là hình gì?
c. Tìm giao tuyến (ANP) và (SMC)
d. Tìm giao điểm SM và (ANP)
**Bài 12**. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P là trung điểm SB, SD, OD.
a. Tìm giao điểm I của BC và (AMN); tìm giao điểm J của CD và (AMN)
b. Tìm giao điểm K của SA và (CMN)
c. Tìm giao tuyến của (NPK) và (SAC)
d. Tìm giao điểm của SC và (NPK). Tìm thiết diện của hình chóp tạo bởi mặt phẳng (AMN)
Bài 13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB. Trên cạnh SC lấy điểm M. Chứng minh HK // CD. Dựng thiết diện của hình chóp tạo bởi (MHK).
Bài 14. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là tứ giác lồi. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SAD. Gọi E là trung điểm của BC.
a. Chứng minh MN//BD
b. Dựng thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (MNE)
c. Gọi H, K lần lượt là giao điểm của (MNE) với SB, SD. Chứng minh rằng LH//BD.
**Bài 15**. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm AB, CD, SA.
a. Chứng minh MN // (SBC); MN // (SAD).

b. Chứng minh SB // (MNP); SC // (MNP).
c. Gọi I, J là trọng tâm. Chứng minh rằng: I J // (SAB), I J // (SAD), I J // (SAC).
**Bài 16**. Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm ΔABD, M thuộc BC sao cho MB = 2 MC. Chứng minh rằng: MG // (ACD)
**Bài 17**. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi I, J là trung điểm BC, SC. K thuộc SD sao cho 2SK = KD.
a. Chứng minh OJ // (SAD), OJ // (SAB)
b. Chứng minh IO // (SCD), I J // (SBD)
c. Gọi M là giao điểm của AI và BD. Chứng minh rằng: MK // (SBC)
**Bài 18**. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SB, SO, OD.
a. Chứng minh rằng: MN // (ABCD), MO // (SCD)
b. Chứng minh rằng: NP // (SAD), NPOM là hình gì?
c. Gọi I là điểm trên cạnh SD sao cho SD = 4 ID. Chứng minh rằng: PI // (SBC), PI // (SAD)
**Bài 19**. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng có tâm lần lượt là I và J .
a. Chứng minh I J // (ADF) và I J // (BCE)
b. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm ΔACE và ΔADF. Chứng minh rằng: MN // (CDEF)
Bài 20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là điểm di chuyển trên cạnh AB. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và (α) song song với hai cạnh SA, AD.
a. Dựng thiết diện của (α) với hình chóp S.ABCD. Chứng minh rằng thiết diện là hình thang.
b. Tìm quỹ tích giao điểm hai cạnh bên của thiết diện khi M di chuyển trên cạnh AB.
Bài 21. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với đáy lớn AB. Gọi M là điểm trên cạnh BC, (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với hai cạnh AB, SC.
a. Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC).
b. Dựng thiết diện của (α) và hình chóp S.ABCD.
c. Chứng minh giao tuyến của (α) và (SAD) song song với SD.
Bài 22. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Gọi P là điểm di chuyển trên cạnh BC.
a. Chứng minh rằng CD // (MNP)
b. Dựng thiết diện của mặt phẳng (MNP) với hình chóp S.ABCD. Chứng minh rằng thiết diện là hình thang.
c. Gọi I là giao điểm hai cạnh bên của thiết diện. Tìm quỹ tích của I.
Vấn đề 6: HAI MẶT PHẲNG SONG SONG
**Bài 1**. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC.
a. Chứng minh (HIK) // (ABCD).
b. Gọi M là giao điểm của AI và KD, N là giao điểm của DH và CI. Chứng minh (SMN) // (HIK).
**Bài 2**. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.
a. Chứng minh (BA'D) // (B'D'C).
b. Chứng minh AC' qua trọng tâm G và G' của tam giác A'BD và CB'D'.
**Bài 3**. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, CD.
a. Chứng minh (OMN) // (SBC).
b. Giả sử tam giác SAD, ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của tam giác ACD và SAB. Chứng minh EF // (SAD).
**Bài 4**. Cho hai hình vuông ABCD, ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên các đường chéo AC, BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho AM = BN. Các dường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.
a. Chứng minh (CBE) // (ADF). b. Chứng minh (DEF) // (MNN').
**Bài 5**. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm SA, SD, AB, ON.
a. Chứng minh (OMN) // (SBC). b. Chứng minh PQ // (SBC).
**Bài 6**. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P là trung điểm SA, CD, AD.
a. Chứng minh rằng: (OMN) // (SBC)
b. Gọi I là điểm trên MP. Chứng minh rằng: OI // (SCD)
**Bài 7**. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q là trung điểm BC, AB, SB, AD.
a. Chứng minh (MNP) // (SAC) và PQ // (SCD)

b. Gọi I là giao điểm AM và BD, J thuộc SA sao cho AJ = 2JS. Chứng minh IJ // (SBC)
c. Gọi K thuộc AC. Tìm giao tuyến (SKM) và (MNP)
**Bài 8**. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành. Gọi I, J, G, P, Q là trung điểm DC, AB, SB, BG, BI.
a. Chứng minh (I JG) // (SAD) và PQ // (SAD).
b. Tìm giao tuyến của (SAC) và (I JG); của (ACG) và (SAD)
**Bài 9**. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng. Gọi I, J, K là trung điểm AB, CD, EF. Chứng minh (ADF) // (BCE) và (DIK) // (JBE)
Bài 10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi I là trung điểm của SD.
a. Tìm giao điểm K của BI và mặt phẳng (SAC)
b. Trên IC lấy điểm H sao cho HC = 2HI. Chứng minh rằng KH//(SBC)
c. Gọi N là điểm thuộc cạnh SI sao cho SN = 2NI. Chứng minh rằng (KHN)//(SBC).
Vấn đề 7: Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng và hai mặt phẳng vuông góc
**Bài 1**. Cho hình chóp S. ABC đáy là ABC vuông cân tại B, SA vuông góc với (ABC)
a. Chứng minh rằng: các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông
b. Kẻ đường cao AD của ΔSAB và đường cao AE của ΔSAC. Chứng minh rằng ΔADE vuông và SC vuông góc với DE.
**Bài 2**. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình vuông, SA vuông góc với (ABCD).
a. Chứng minh rằng: BC vuông góc với (SAB) và CD vuông góc với (SAD)
b. Chứng minh rằng: BD vuông góc với (SAC)
c. Kẻ AE vuông góc với SB. Chứng minh rằng: SB vuông góc với (ADE)
**Bài 3**. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình vuông, SA = SB = SC = SD.
a. Chứng minh SO vuông góc với (ABCD) và BD vuông góc với (SAC)
b. Gọi I là trung điểm AB. Chứng minh rằng: AB vuông góc với (SOI)
c. Kẻ đường cao OJ của SOI. Chứng minh rằng: SA vuông góc với OJ
**Bài 4**. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông tâm O cạnh a. SA vuông góc với (ABCD) và SA = a√(3)
a. Chứng minh mỗi mặt bên của hình chóp là tam giác vuông
b. Tính góc giữa SD và (ABCD); SC và (SAD)
c. Vẽ AH vuông góc với SB, AK vuông góc với SD. Chứng minh rằng: AH vuông góc với (SBC); SC vuông góc với (AHK)
d. Chứng minh rằng: BD vuông góc với (SAC). Tính góc giữa SD và (SAC)
**Bài 5**. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thoi tâm O. Hai tam giác SAB và SAC vuông ở A, cho SA = a, AC = 2a√(3)
a. Chứng minh SA vuông góc với (ABCD) và BD vuông góc với SC.
b. Vẽ AH là đường cao của SAO. Chứng minh rằng: AH vuông góc với (SBD)
c. Tính góc giữa AO và (SBD).
**Bài 6**. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông tâm O, SO vuông góc với (ABCD), SO = a√(3), AB = a√(2).
a. Chứng minh rằng: BD vuông góc với SA; AC vuông góc với SB
b. Vẽ CI vuông góc với SD, OJ vuông góc với SC. Chứng minh rằng: SD vuông góc với (ACI); SC vuông góc với (BDJ)
c. K là trung điểm SB. Chứng minh rằng: OK vuông góc với OI
d. Tính góc giữa SA và (ABCD)
**Bài 7**. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông, SA vuông góc với (ABCD)
a. Chứng minh rằng: (SAC) vuông góc với (SBD)
b. Gọi BE, DF là đường cao ΔSBD. Chứng minh (AEF) vuông góc với (SAC)
**Bài 8**. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông tâm O cạnh a, SA = a, SA vuông góc với (ABCD)
a. Chứng minh: (SBC) vuông góc với (SAB); (SCD) vuông góc với (SAD)
b. Chứng minh rằng: (SAC) vuông góc với (SBD)
c. Gọi AI, AJ là đường cao SAB, SAC. Chứng minh rằng: (SCD) vuông góc với (AI J)
d. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) & (ABCD), (SBD) & (ABCD)
**Bài 9**. Cho tứ diện ABCD, AD vuông góc với (ABC), DE là đường cao của ΔBCD
a. Chứng minh rằng: (ABC) vuông góc với (ADE)
b. Vẽ đường cao BF và đường cao BK của ΔABC và ΔBCD. Chứng minh rằng (BFK) vuông góc với (BCD)
c. Gọi I, J là trực tâm. Chứng minh rằng: I J vuông góc với (BCD)

**Bài 10**. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, CD. Trên đường thẳng vuông góc (ABCD) tại I lấy S.
a. Chứng minh rằng: BC vuông góc với (SAB), CD vuông góc với (SI J)
b. Chứng minh rằng: (SAD) vuông góc với (SBC), (SAB) vuông góc với (SI J)
c. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng: (SIM) vuông góc với (SBD)
d. SI = a. Tính góc giữa (SCD) và (ABCD)
**Bài 11**. Cho hình chóp đều S. ABCD, O là tâm ABCD. Gọi I là trung điểm AB, cho SA = a, AB = a.
a. Chứng minh rằng: (SAC) vuông góc với (SBD), (SOI) vuông góc với (ABCD)
b. Chứng minh rằng: (SIO) vuông góc với (SCD)
c. Gọi OJ là đường cao SOI. Chứng minh rằng: OJ vuông góc với SB
d. Gọi BK là đường cao SBC. Chứng minh rằng: (SCD) vuông góc với (BDK)
e. Tính góc giữa mặt bên và mặt đáy.
**Bài 12**. Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình chữ nhật, (SAB) vuông góc với (ABCD). Cho AB = a, AD = a√(2).
a. Chứng minh rằng: SA vuông góc với (ABCD), (SAD) vuông góc với (SCD)
b. Gọi AH là đường cao ΔSAB. Chứng minh rằng AH vuông góc với (SBC), (SBC) vuông góc với (AHC)
c. Chứng minh rằng: DH vuông góc với SB
d. Tính góc giữa (SAC) và (SAD)
**Bài 13**. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình vuông cạnh a tâm O, SA = a. Cho (SAB) vuông góc với (ABCD), (SAD) vuông góc với (ABCD).
a. Chứng minh rằng: SA vuông góc với (ABCD), BD vuông góc với (SAC)
b. Gọi AH, AK là đường cao. Chứng minh rằng: AH vuông góc với BD, AK vuông góc với (SCD)
c. Chứng minh rằng: (SAC) vuông góc với (AHK)
d. Tính góc giữa (SAC) và (SCD)
**Bài 14**. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a tâm O, SA vuông góc với đáy, SA = a.
a. Chứng minh: BD vuông góc với SC
b. Tính các góc giữa SC và (ABCD); (SBD) và (ABCD)
c. Tính góc giữa (SCD) & (ABCD). Tính diện tích hình chiếu của ΔSCD trên (ABCD)
Vấn đề 8: Khoảng cách – diện tích – hình chiếu
**Bài 1**. Cho tứ diện SABC, ΔABC vuông cân tại B, AC = SA = 2a và SA vuông góc với (ABC)
a. Chứng minh rằng: (SAB) vuông góc với (SBC)
b. Tính d(A, (SBC))
c. Gọi O là trung điểm AC. Tính d(O, (SBC))
**Bài 2**. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình vuông cạnh a tâm O. SA vuông góc với (ABCD) và SA = 2a; dựng BK vuông góc với SC.
a. Chứng minh rằng: SC vuông góc với (DBK)
b. Tính d(A, (SBC)); d(A, (SDC)); d(O, (SBC))
c. Tính d(BD, SC); d(AD, BK)
**Bài 3**. Cho hình chóp S. ABCD đều, O là tâm hình vuông ABCD, cạnh bên bằng 2a, cạnh đáy bằng a. Gọi I, J là trung điểm AB, CD.
a. Chứng minh rằng: (SI J) vuông góc với (SAB)
b. Tính d(O, (SCD)); d(I, (SCD))
c. Tính d(SC, BD); d(AB, SD)
**Bài 4**. Cho hình chóp S. ABCD có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, góc A = 60° và đường cao SO = a. Tính d(O, (SBC)) và d(AD, SB)
**Bài 5**. Cho tam giác ABC đều cạnh a, nằm trong mặt phẳng (α). Trên đường vuông góc với (α) tại B, C. Vẽ BD = a√(2) / 2, CE = a√(2) nằm cùng phía với mặt phẳng (α).
a. Chứng minh rằng tam giác ADE vuông và tính diện tích tam giác ADE.
b. Tìm góc giữa (ADE) và (α).
**Bài 6**. Cho tam giác ABC có B, C là hình chiếu của E, F lên (α) sao cho tam giác ABF là tam giác đều cạnh a, CF = a, BE = a/2. Gọi I = BC ∩ EF. Chứng minh AI vuông góc với AC. Tính diện tích tam giác ABC và tính góc giữa (ABC) và (α).
**Bài 7**. Cho tam giác ABC cân, đáy BC = 3a, BC vuông góc với (α), đường cao a√(3). D là hình chiếu của A lên (α) sao cho tam giác DBC vuông tại D. Tìm góc giữa (ABC) và (α).

**Bài 8**. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Từ các đỉnh A, B, C vẽ các nửa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa ABC. Trên các nửa đường thẳng đó lần lượt lấy D, E, F sao cho AD = a, BE = 2a, CF = x.
a. Tìm x để tam giác DEF vuông tại D.
b. Với x vừa tìm được ở câu trên, tìm góc giữa (ABC) và (DEF).
Bài 9. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB = 2a, BC = $a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt đáy, SA = 2a. Gọi I là trung điểm của AB.
a. Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp S.ABC đều là tam giác vuông
b. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SIC) và (ABC)
c. Gọi N là trung điểm của AC, tính khoảng cách từ N đến mặt phẳng (SBC).
Bài 10. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Biết SA = SB = SC = $a\sqrt{3}$.
a. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC)
b. Tính diện tích của ΔSBC.
Bài 11. Cho hình chóp S.ABC có ΔABC vuông cân tại A, BC = 2a, SA = SB = SC = $a\sqrt{3}$.
a. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC)
b. Chứng minh rằng (SBC) vuông góc với (ABC)
c. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC)
d. Tính diện tích của ΔSAC.
Bài 12. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh 2a, góc BAD = 60°. Cho SA = SB = SD = $a\sqrt{3}$.
a. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD)
b. Chứng minh (SAC) vuông góc với mặt đáy (ABCD)
c. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD)