

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$

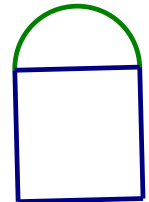
- Rút gọn biểu thức P
- Tìm m sao cho $m(\sqrt{x}-3).P > x+1$ đúng với mọi giá trị $x > 9$

Bài 2. (3,0 điểm)

- Trong hệ trục tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $(d_1): y = 5x + 9$ và $(d_2): y = (m^2 - 4)x + 3m$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để hai đường thẳng d_1 và d_2 là song song.
- Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình trên có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn:
 $(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2 - 2) \leq 0$
- Hai ô tô cùng khởi hành một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120km. Vì mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là 10km nên đến B trước ô tô thứ hai là 0,4 giờ. Tính vận tốc mỗi ô tô, biết rằng vận tốc của mỗi ô tô là không đổi trên cả quãng đường AB.

Bài 3. (1,5 điểm)

Bác An muốn làm một cửa sổ khuôn gỗ, phía trên có dạng nửa hình tròn, phía dưới có dạng hình chữ nhật. Biết rằng: đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và tổng độ dài các khuôn gỗ (các đường in đậm vẽ trong hình bên, bỏ qua độ rộng của khuôn gỗ) là 8m. Em hãy giúp bác An tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật để cửa sổ có diện tích lớn nhất

**Bài 4. (3,0 điểm)**

Cho đường tròn (O) và một điểm nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC . Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I (I khác C và O). Đường thẳng IA cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE

- Chứng minh $AB.BE = BD.AE$
- Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO , d cắt BC tại điểm K . Chứng minh $HK // CD$
- Tia CD cắt AO tại điểm P , tia EO cắt BP tại điểm F . Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhật

Bài 5. (0,5 điểm) Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} 0 < x, y, z \leq 1 \\ \frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} = \frac{3}{x+y+z} \end{cases}$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

a) Rút gọn biểu thức P

Với $x > 0, x \neq 4, x \neq 9$ ta có:

$$P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} + \frac{8x}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$$

$$P = \frac{4\sqrt{x}(2-\sqrt{x})+8x}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} : \frac{\sqrt{x}-1-2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{8\sqrt{x}-4x+8x}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-1-2\sqrt{x}+4}$$

$$= \frac{8\sqrt{x}+4x}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{3-\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) \cdot \sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{4x}{\sqrt{x}-3}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{4x}{\sqrt{x}-3}.$$

b) Tìm m sao cho $m(\sqrt{x}-3) \cdot P > x+1$ đúng với mọi giá trị $x > 9$

Điều kiện: $x > 9, \forall x > 9$, Ta có:

$$m(\sqrt{x}-3) \cdot P > x+1 \Leftrightarrow m(\sqrt{x}-3) \cdot \frac{4x}{\sqrt{x}-3} > x+1$$

$$\Leftrightarrow 4mx > x+1 \Leftrightarrow (4m-1)x > 1 \Leftrightarrow 4m-1 > \frac{1}{x}$$

$$\text{Vì } x > 9 \text{ nên } \frac{1}{x} < \frac{1}{9}$$

$$\text{Do đó } 4m-1 > \frac{1}{x}, \forall x > 9 \text{ thì } 4m-1 \geq \frac{1}{9} \Leftrightarrow 4m \geq \frac{10}{9} \Leftrightarrow m \geq \frac{5}{18}$$

$$\text{Vậy } m \geq \frac{5}{18}$$

Bài 2.

a) Tìm các giá trị của m để hai đường thẳng d_1, d_2 song song

Ta có hai đường thẳng $(d_1): y = 5x + 9$ và $(d_2): y = (m^2 - 4)x + 3m$ song song

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 5 \\ 3m \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 9 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \Leftrightarrow m = -3 \\ m \neq 3 \end{cases}$$

Vậy $m = -3$ thì đường thẳng d_1 và d_2 song song.

b) Tìm m để $(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2 - 2) \leq 0$

Xét phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$, ta có:

$$\Delta' = (m-1)^2 - 2m + 5 = m^2 - 2m + 1 - 2m + 5 = m^2 - 4m + 4 + 2 = (m-2)^2 + 2 > 0 (\forall m) \Rightarrow \text{Phương trình đã cho luôn có hai}$$

nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ x_1 x_2 = 2m - 5 \end{cases}$$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình đã cho nên ta có:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 2(m-1)x_1 + 2m - 5 = 0 &\Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + 2x_1 + 2m - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1 + 2x_1 - 4 = 0 &\Leftrightarrow x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1 = -2(x_1 - 2) \end{aligned}$$

Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned} (x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2 - 2) \leq 0 &\Leftrightarrow -2(x_1 - 2)(x_2 - 2) \leq 0 \\ \Leftrightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) \geq 0 &\Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow 2m - 5 - 2(2m - 2) + 4 \geq 0 &\Leftrightarrow 2m - 1 - 4m + 4 \geq 0 \\ \Leftrightarrow 2m - 1 - 4m + 4 \geq 0 &\Leftrightarrow -2m \geq -3 \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy $m \leq \frac{3}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán

c) Tính vận tốc mỗi ô tô

Gọi vận tốc của ô tô thứ nhất là $x (km/h)$ ($x > 10$)

$$\Rightarrow \text{Thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường } AB \text{ là } \frac{120}{x} (h)$$

Vận tốc của ô tô thứ nhất lớn hơn vận tốc của ô tô thứ hai là $10 km/h \Rightarrow$ Vận tốc của ô tô thứ hai là: $x - 10 (km/h)$

$$\Rightarrow \text{Thời gian của ô tô thứ hai đi hết quãng đường } AB \text{ là: } \frac{120}{x-10} (h)$$

Vì ô tô thứ nhất đến B trước ô tô thứ hai là $0,4h = \frac{2}{5}h$ nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x-10} - \frac{120}{x} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 5.120x - 5.120.(x-10) = 2x(x-10)$$

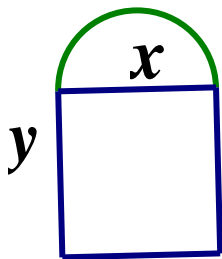
$$\Leftrightarrow 600x - 600x + 6000 = 2x^2 - 20x \Leftrightarrow 2x^2 - 20x - 6000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x - 3000 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 60x + 50x - 3000 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-60)(x+50) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-60=0 \\ x+50=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=60(tm) \\ x=-50 \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ô tô thứ nhất là $60km/h$ và vận tốc của ô tô thứ hai: $60 - 10 = 50(km/h)$

Bài 3. Tính độ dài cạnh và diện tích lớn nhất



Gọi đường kính của nửa hình tròn là $x(m)$ ($0 < x < 8$) \Rightarrow Bán kính của nửa đường tròn

$$\frac{x}{2}(m)$$

Khi đó cạnh phía trên của hình chữ nhật: $x(m)$

Gọi cạnh còn lại của hình chữ nhật là $y(m)$ ($0 < y < 8$)

$$\text{Độ dài nửa đường tròn phía trên: } \frac{1}{2}\pi x = \frac{\pi x}{2}(m)$$

$$\text{Khi đó ta có tổng độ dài các khuôn gỗ: } \frac{\pi x}{2} + x + 2y = 8 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x + 2y = 8$$

$$\Leftrightarrow 2y = 8 - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)x \Leftrightarrow y = 4 - \left(\frac{\pi + 2}{4}\right)x$$

$$\text{Diện tích của cửa sổ: } S = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + xy = \frac{\pi x^2}{8} + xy$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{\pi x^2}{8} + x \left[4 - \left(\frac{\pi + 2}{4} \right) x \right] \Leftrightarrow S = \frac{\pi x^2}{8} + 4x - \left(\frac{\pi + 2}{4} \right) x^2$$

$$\Leftrightarrow S = - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \right) x^2 + 4x \Leftrightarrow S = - \frac{\pi + 4}{8} x^2 + 4x$$

$$\Leftrightarrow S = - \frac{\pi + 4}{8} \cdot \left[x^2 - \frac{32}{\pi + 4} x \right] \Leftrightarrow S = - \frac{\pi + 4}{8} \cdot \left[x^2 - 2x \cdot \frac{16}{\pi + 4} + \left(\frac{16}{\pi + 4} \right)^2 - \left(\frac{16}{\pi + 4} \right)^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow S = - \frac{\pi + 4}{8} \cdot \left(x - \frac{16}{\pi + 4} \right)^2 + \frac{32}{\pi + 4} \leq \frac{32}{\pi + 4}$$

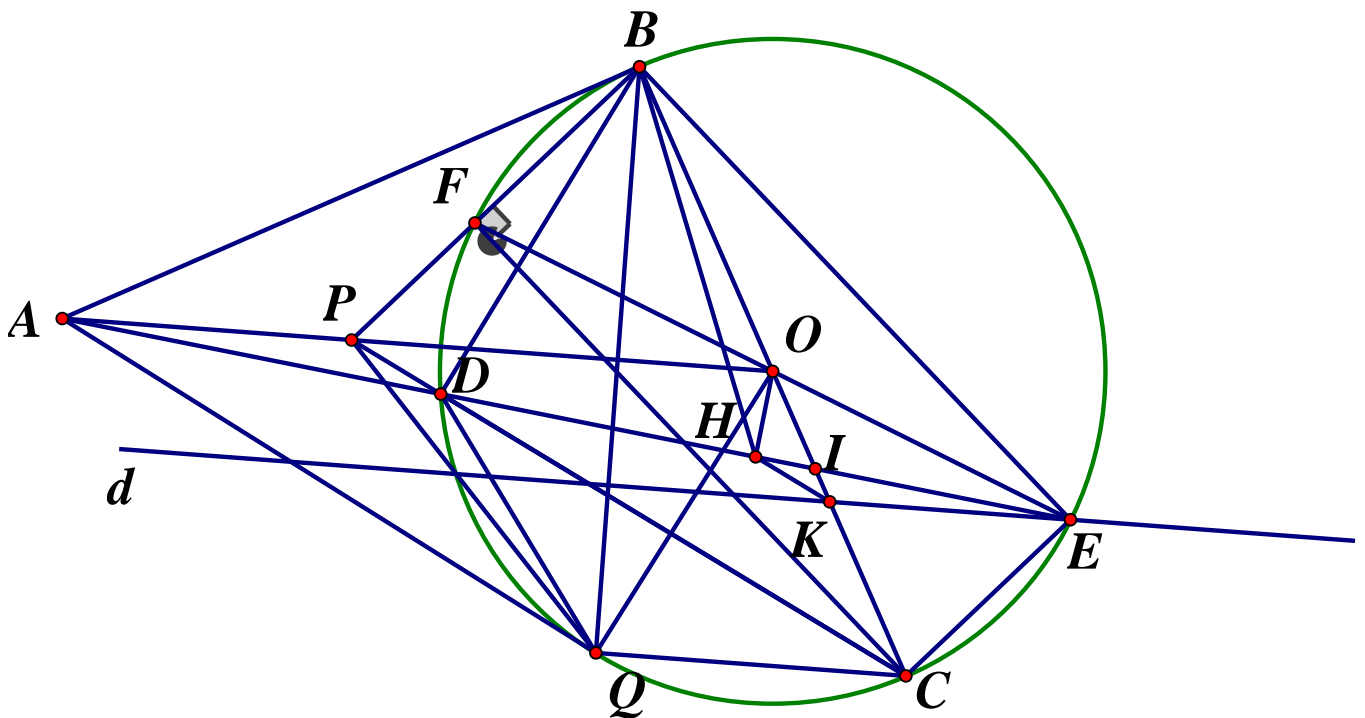
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - \frac{16}{\pi + 4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{16}{\pi + 4} (tm)$

$$\Rightarrow y = 4 - \frac{\pi + 2}{4} \cdot \frac{16}{\pi + 4} = \frac{4\pi + 16 - 4(\pi + 2)}{\pi + 4} = \frac{4\pi + 16 - 4\pi - 8}{\pi + 4} = \frac{8}{\pi + 4} (tm)$$

Vậy khi cửa sổ có diện tích lớn nhất thì độ dài cạnh trên của hình chữ nhật là: $\frac{16}{\pi + 4} m$ và

cạnh bên của hình chữ nhật là $\frac{8}{\pi + 4} (cm)$

Bài 4.



a) Chứng minh $AB \cdot BE = BD \cdot AE$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$ có: \widehat{A} chung; $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn \widehat{BD}) $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEB(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE} \text{ (hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)} \Rightarrow AB \cdot BE = BD \cdot AE(dfcm)$$

b) Chứng minh $HK // CD$

Vì H là trung điểm của $DE(gt)$ nên $OH \perp DE$ (tính chất đường kính và dây cung)

$$\Rightarrow \widehat{OHD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OHA} = 90^\circ$$

Xét tứ giác $OBAH$ có: $\widehat{OHA} = 90^\circ (cmt)$; $\widehat{OBA} = 90^\circ$ (do AB là tiếp tuyến của (O))

$$\Rightarrow \widehat{OHA} + \widehat{OBA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow OBAH \text{ là tứ giác nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{OAH} = \widehat{OBH} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OH)}$$

Mà $\widehat{OAH} = \widehat{HEK}$ (so le trong do $d // OA$)

$\Rightarrow \widehat{OBH} = \widehat{HKE} = \widehat{HBK} \Rightarrow$ Tứ giác $BEKH$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau).

$$\Rightarrow \widehat{HKB} = \widehat{HEB} = \widehat{DEB} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HB)}$$

Mà $\widehat{DEB} = \widehat{DCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{BD}) $\Rightarrow \widehat{HKB} = \widehat{DCB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD) $\Rightarrow \widehat{HKB} = \widehat{DCB} (= \widehat{DEB})$. Lại có hai góc này ở vị trí đồng vị bằng nhau

$$\Rightarrow HK // CD(dfcm)$$

c) Chứng minh $BECF$ là hình chữ nhật

Kẻ tiếp tuyến AQ với đường tròn (O) ($Q \neq B$)

Xét tứ giác $OBAQ$ có: $\widehat{OBA} + \widehat{OQA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow OBAQ$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°)

$$\Rightarrow \widehat{OBQ} = \widehat{OAQ} = \widehat{PAQ} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OQ)}$$

Lại có: $\widehat{OBQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{CDQ}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CQ)

$$\Rightarrow \widehat{PAQ} = \widehat{CDQ} (= \widehat{OBQ}) \Rightarrow$$
 Tứ giác $APDQ$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện) $\Rightarrow \widehat{ADP} = \widehat{AQP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{AP})

$$\Rightarrow \widehat{ADP} = \widehat{AQP} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn AP)}$$

Mà $\widehat{ADP} = \widehat{CDE}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CBE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn \widehat{CE})

$$\Rightarrow \widehat{AQP} = \widehat{CBE} \quad (1)$$

Xét $\triangle ABP$ và $\triangle AQP$ có: AP chung; $\widehat{BAP} = \widehat{QAP}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau);

$$AB = AQ \text{ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)} \Rightarrow \triangle ABP = \triangle AQP(c.g.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{AQC} \quad (2) \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{ABP} (= \widehat{AQP})$

$\Rightarrow \widehat{CBE} + \widehat{CBF} = \widehat{ABP} + \widehat{CBF} \Rightarrow \widehat{EBF} = \widehat{ABC} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{EBF}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O) nên EF là đường kính của (O)

$\Rightarrow O$ là trung điểm của EF

Xét tứ giác BECF có hai đường chéo BC, EF cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

$\Rightarrow BECF$ là hình bình hành. Lại có: $\widehat{EBF} = 90^\circ$ (cmt) nên BECF là hình chữ nhật (dfcm)

Bài 5.

Ta có: $\begin{cases} x \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1 \\ xy \leq y \end{cases}$

$\Rightarrow x^2 + xy \leq 1 + y \Rightarrow x^2 + xy + zx \leq 1 + y + zx$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2 + xy + zx} \geq \frac{1}{1 + y + zx} \Rightarrow \frac{1}{1 + y + zx} \leq \frac{1}{x(x + y + z)}$

$\Rightarrow \frac{x}{1 + y + zx} \leq \frac{1}{x + y + z}$

Chúng minh tương tự ta có: $\frac{y}{1 + z + xy} \leq \frac{1}{x + y + z}$; $\frac{z}{1 + x + yz} \leq \frac{1}{x + y + z}$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức ta được :

$$\frac{x}{1 + y + zx} + \frac{y}{1 + z + xy} + \frac{z}{1 + x + yz} \leq \frac{3}{x + y + z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Vậy có duy nhất 1 cặp số thỏa mãn yêu cầu bài toán $(x; y; z) = (1; 1; 1)$