ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2020

MÔN THI: TOÁN (cho tất cả các thí sinh)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (4 điểm)

1) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ 9x^3=xy^2+70(x-y) \end{cases}$
2) Giải phương trình: $11\sqrt{5-x}+8\sqrt{2x-1}=24+3\sqrt{(5-x)(2x-1)}$

Câu II. (2 điểm)

1) Tìm x, y nguyên dương thỏa mãn $x^2y^2-16xy+99=9x^2+36y^2+13x+26y$
2) Với a,b là những số thực dương thỏa mãn
   $2\le 2a+3b\le 5 \qquad ;8a+12b\le 2a^2+3b^2+5ab+10$
   Chứng minh rằng: $3a^2+8b^2+10ab\le 21$

Câu III. (3 điểm)

Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC}$ là góc nhỏ nhất trong ba góc của tam giác và nội tiếp đường tròn (O). Điểm D thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác $\widehat{BAC}$. Lấy các điểm M,N thuộc (O) sao cho đường thẳng CM, BN cùng song song với đường thẳng AD

1) Chứng minh rằng $AM=AN$
2) Gọi giao điểm của đường thẳng MN với các đường thẳng AC, AB lần lượt là E, F. Chứng minh rằng bốn điểm B,C,E,F cùng thuộc một đường tròn
3) Gọi P,Q theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng AM, AN. Chứng minh rằng các đường thẳng EQ, FP, AD đồng quy.

Câu IV. (1 điểm)

Với a,b,c là những số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a+bc)^2}{b(ab+2c^2)}+\frac{b(b+ca)^2}{c(bc+2a^2)}+\frac{c(c+ab)^2}{a(ca+2b^2)}\ge 4$$

ĐÁP ÁN

Câu I.

1) **Giải hệ phương trình:** $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 & (1) \\ 9x^3=xy^2+70(x-y) & (2) \end{cases}$

Nếu $x=y,$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases}3x^2=7\\8x^3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\sqrt{\dfrac{7}{3}}\\x=0\end{cases}$ (Vô nghiệm), do đó $x\neq y$

Nhân cả hai vế của phương trình (1) với $x-y\neq 0$ ta có:

$(1)\Leftrightarrow(x-y)\left(x^2+y^2+xy\right)=7(x-y)\Leftrightarrow x^3-y^3=7(x-y)\Leftrightarrow 10\left(x^3-y^3\right)=70(x-y)$

Thế vào phương trình (2) ta có:

$(2)\Leftrightarrow 9x^3=xy^2+10\left(x^3-y^3\right)\Leftrightarrow x^3+xy^2-10y^3=0$

$\Leftrightarrow(x-2y)\left(x^2+2xy+5y^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2y=0\quad(3)\\x^2+2xy+5y^2=0\quad(4)\end{array}\right.$

Ta có: $(3)\Leftrightarrow x=2y$

Thế vào phương trình (1) ta có: $4y^2+y^2+2y^2=7\Leftrightarrow 7y^2=7\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\Rightarrow x=2\\y=-1\Rightarrow x=-2\end{array}\right.$

$(4)\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2+4y^2=0\Leftrightarrow(x+2y)^2+4y^2=0$

$\Leftrightarrow(x+2y)^2+(2y)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=0\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=0(ktm)$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y)\in\{(2;1);(-2;-1)\}$

2) Giải phương trình: $11\sqrt{5-x}+8\sqrt{2x-1}=24+3\sqrt{(5-x)(2x-1)}$

$11\sqrt{5-x}+8\sqrt{2x-1}=24+3\sqrt{(5-x)(2x-1)}\ (*)$

ĐKXĐ: $\begin{cases}5-x\geq 0\\2x-1\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\leq x\leq 5$

Đặt : $\begin{cases}\sqrt{5-x}=a(a\geq 0)\\\sqrt{2x-1}=b(b\geq 0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=5-x\\b^2=2x-1\end{cases}$

$\Rightarrow 2a^2+b^2=2(5-x)+2x-1=9$

Khi đó ta có: $\begin{cases}11a+8b=24+3ab\ (1)\\2a^2+b^2=9\ \ (2)\end{cases}$

Giải phương trình (1) ta có: $(1)\Leftrightarrow 11a-3ab=24-8b\Leftrightarrow a(11-3b)=24-8b(*)$

Với $11-3b=0\Leftrightarrow b=\dfrac{11}{3}\Rightarrow(*)\Leftrightarrow 0a=-\dfrac{16}{3}$(vô lý)$\Rightarrow b=\dfrac{11}{3}$ không là nghiệm của phương trình (*)

$\Rightarrow a=\dfrac{24-8b}{11-3b}=\dfrac{8b-24}{3b-11}$, Thay $a=\dfrac{8b-24}{3b-11}$ vào (2) ta được:

$$(2)\Leftrightarrow 2\left(\frac{8b-24}{3b-11}\right)^2+b^2=9$$

$$\Leftrightarrow 2\left(64b^2-384b+576\right)+b^2\left(9b^2-66b+121\right)=9\left(9b^2-66b+121\right)$$

$$\Leftrightarrow 128b^2-768b+1152+9b^4-66b^3+121b^2-81b^2+594b-1089=0$$

$$\Leftrightarrow 9b^4-66b^3+168b^2-174b+63=0\Leftrightarrow 3b^4-22b^3+56b^2-58b+21=0$$

$$\Leftrightarrow (b-1)\left(3b^3-19b^2+37b-21\right)=0\Leftrightarrow (b-1)(b-1)(b-3)(3b-7)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b-1=0\\ b-3=0\\ 3b-7=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1\\ b=3\\ b=\dfrac{7}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x-1}=1\\ \sqrt{2x-1}=3\\ \sqrt{2x-1}=\dfrac{7}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1=1\\ 2x-1=9\\ 2x-1=\dfrac{49}{9}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(tm)\\ x=5(tm)\\ x=\dfrac{29}{9}(tm)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{1;\dfrac{29}{9};5\right\}$

Câu II.

1) **Tìm x,y nguyên dương thỏa mãn:** $x^2y^2-16xy+99=9x^2+36y^2+13x+26y$

$$x^2y^2-16xy+99=9x^2+36y^2+13x+26y$$

$$\Leftrightarrow x^2y^2+20xy+99=9x^2+36xy+36y^2+13x+26y$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2y^2+20xy+100\right)-1=(3x+2y)^2 13(x+2y)(*)$$

Đặt $\begin{cases} x+2y=a(a>0)\\ xy+10=b(b>10)\end{cases}$

$$\Rightarrow (*)\Leftrightarrow b^2-1=9a^2+13a$$

$$\Leftrightarrow 9a^2+2.3a.\frac{13}{6}+\frac{169}{36}-\frac{169}{36}=b^2-1$$

$$\Leftrightarrow \left(3a+\frac{13}{6}\right)^2-b^2=\frac{133}{36}\Leftrightarrow (18a+13)^2-36^2=133$$

$$\Leftrightarrow (18a-6b+13)(18a+6b+13)=133 \qquad (1)$$

Ta lại có : $a,b>0\Rightarrow 18a+6b+13>18a-6b+13>0$

Lại có $133=133.1=19.7$

$$\Rightarrow(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}18a+6b+13=0\\18a-6b+13=1\end{cases}\\\begin{cases}18a+6b+13=19\\18a-6b+13=7\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}18a+6b=120\\18a-6b=-12\end{cases}\\\begin{cases}18a+6b=32\\18a-6b=-6\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=11\\a=3\end{cases}(tm)\\\begin{cases}a=\dfrac{19}{6}\\b=-\dfrac{25}{18}\end{cases}(ktm)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+2y=3\\xy+10=11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-2y\\xy=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-2y\\y(3-2y)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-2y\\2y^2-3y+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-2y\\(2y-1)(y-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3-2y\\\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{2}(ktm)\\y=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1(tm)\\y=1(tm)\end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;1)$

2) Với a,b **là những số thực dương thỏa mãn** $2\le 2a+3b\le 5(1)$;
$8a+12b\le 2a^2+3b^2+5ab+10$. **Chứng minh rằng** $3a^2+8b^2+10ab\le 21(2)$

Giải

$(2)\Leftrightarrow 8a+12b\le(2a+3b)(a+b)+10\le 5(a+b)+10$

$\Leftrightarrow 3a+7b\le 10.$ Mặt khác $2a+3b\le 5$

Dự đoán dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$

Ta có: $\underbrace{3a^2+8b^2+10ab}_{(I)}=(3a+4b).(a+2b)$

Áp dụng bất đẳng thức $AB\le\dfrac{(A+B)^2}{4}$, ta có:

$$21.(I)=\left[3(3a+4b)\right].\left[7(a+2b)\right]\le\frac{(9a+12b+7a+14b)^2}{4}$$

$$\Rightarrow 21.(I)\le\frac{(16a+26b)^2}{4}=(8a+13b)^2$$

Ta biểu diễn $8a+13b$ theo $3a+7b$ và $2a+3b$ bằng cách đồng nhất hệ số

Xét $8a+13b=x(3a+7b)+y(2a+3b)$

$\Leftrightarrow 8a+13b=(3x+2y).a+(7x+3y).b$

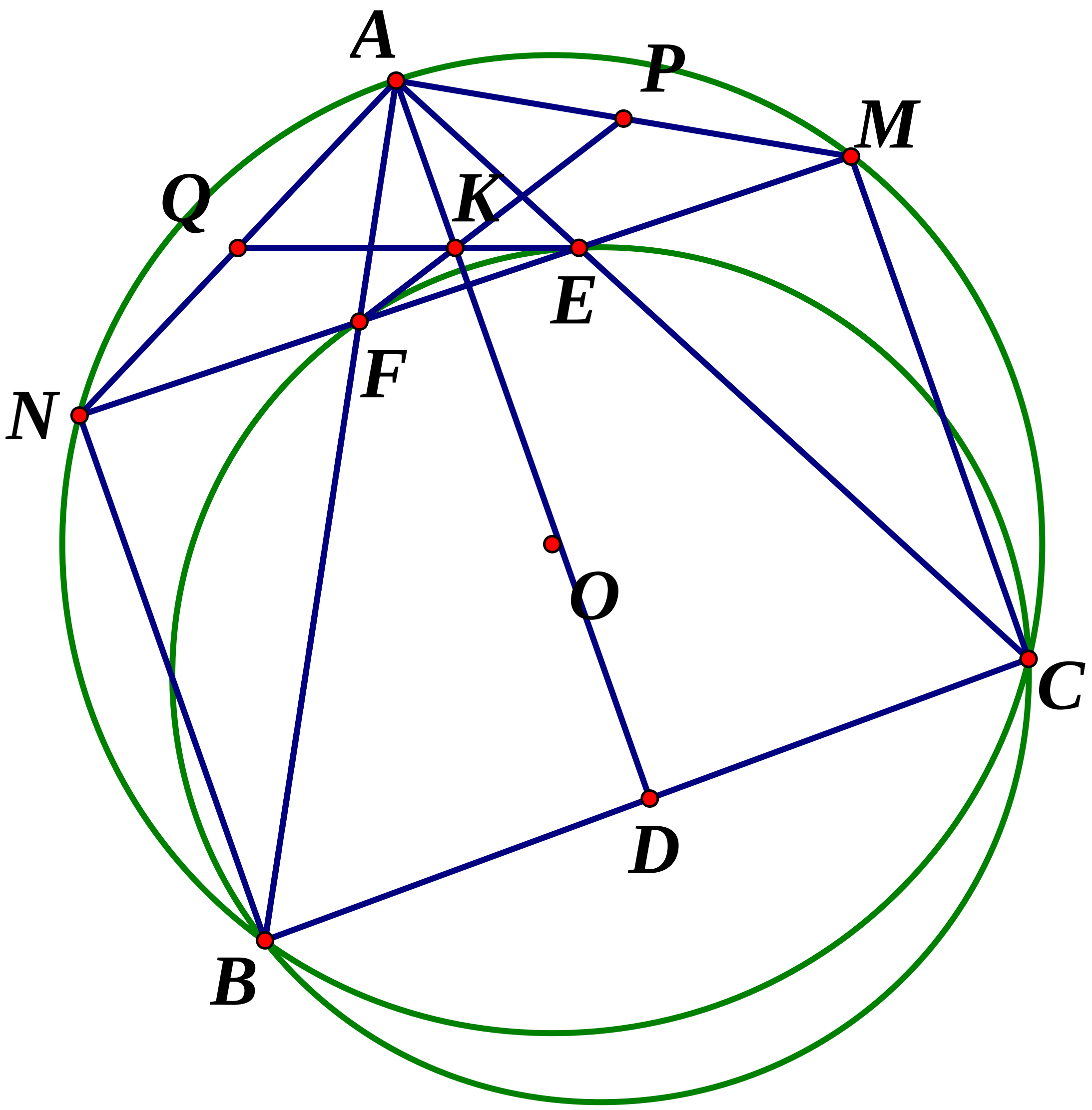
$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x+2y=8\\7x+3y=13\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{2}{5}\\y=\dfrac{17}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 21.(I)\le(8a+13b)^2=\left[\frac{2}{5}.(3a+7b)+\frac{17}{5}.(2a+3b)\right]^2\le\left(\frac{2}{5}.10+\frac{17}{5}.5\right)^2=21^2$$

$\Rightarrow (I)\le 21.$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1$

Câu III.



1) **Chứng minh rằng** $AM=AN$

Ta có: $\widehat{NBA}=\widehat{DAB}$ (so le trong do $BN//AD$)

$\widehat{DAB}=\widehat{DAC}(gt);\widehat{DAC}=\widehat{ACM}$ (so le trong do $CM\,//\,AD$)

$\Rightarrow \widehat{NBA}=\widehat{MCA}\Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AN}=sd\,\overset{\frown}{AM}$ (trong một đường tròn, hai góc nội tiếp bằng nhau thì chắn hai cung bằng nhau).

Vậy $AM=AN$ (trong một đường tròn, hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau)

2) Chứng minh rằng 4 điểm B,C,E,F cùng thuộc một đường tròn.

Ta có: $\widehat{AEF}=\frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AN}+sd\,\overset{\frown}{CM}\right)$(góc có đỉnh ở bên trong đường tròn)

$=\frac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AM}+sd\,\overset{\frown}{CM}\right)=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{AC}=\widehat{ABC}$ (góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn)

Vậy tứ giác $BCEF$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện bằng nhau) hay B,C,E,F cùng thuộc một đường tròn.

3) Chứng minh các đường thẳng EQ,FP,AD đồng quy

Áp dụng định lý Mê-lê-na-uýt trong tam giác AHN, cát tuyến EKQ, ta có:

$\frac{EN}{EH}.\frac{KH}{KA}.\frac{QA}{QN}=1\Rightarrow\frac{EN}{EH}.\frac{KH}{KA}=1$(do Q là trung điểm của $AN(gt)$nên $QA=QN$)

$\Rightarrow\frac{EN}{EH}=\frac{KA}{KH}(I)$

Gọi $AD\cap PE=\{K'\}$.Ta đi chứng minh $K'\equiv K$

Áp dụng định lý Mê-lê-na-uýt trong tam giác AHM, cát tuyến PKF ta có:

$\frac{FM}{FH}.\frac{K'H}{K'A}.\frac{PA}{PM}=1\Rightarrow\frac{FM}{FH}.\frac{K'H}{K'A}=1$(Do P là trung điểm của $AM\,(gt)$nên $PA=PM$)

$\Rightarrow\frac{FM}{FH}=\frac{K'A}{K'H}(II)$

Ta sẽ chứng minh $\frac{EN}{EH}=\frac{FM}{FH}\Leftrightarrow\frac{FM}{EN}=\frac{FH}{EH}=\frac{FM-FH}{EN-EH}=\frac{HM}{HN}(*)$(tính chất dãy tỉ số bằng nhau)

Vì $BN\,//\,AD\,//\,CM$ nên áp dụng định lý Ta – let ta có: $\frac{HM}{HN}=\frac{DC}{DB}$

Lại có : $\frac{DC}{DB}=\frac{AC}{AB}$(định lý đường phân giác), do đó: $\frac{HM}{HN}=\frac{AC}{AB}(1)$

Xét ΔAEF và ΔABC có: $\widehat{AEF}=\widehat{ABC}(cmt),\widehat{BAC}$ chung

$\Rightarrow\Delta AEF\sim\Delta ABC\,(g.g)\Rightarrow\frac{AC}{AB}=\frac{AF}{AE}(2)$

Từ (1) và (2)$\Rightarrow\frac{HM}{HN}=\frac{AF}{AE}\qquad(3)$

Tiếp tục áp dụng định lý đường phân giác trong tam giác AEF ta có: $\dfrac{AF}{AE}=\dfrac{HF}{HE}(4)$

Từ (3) và (4) ta suy ra $\dfrac{HM}{HN}=\dfrac{HF}{HE}$, do đó $(*)$ được chứng minh, tức là $\dfrac{EN}{EH}=\dfrac{FM}{FH}(III)$

Từ $(I),(II),(III)$ suy ra $\dfrac{KA}{KH}=\dfrac{K'A}{K'H}$, do đó $K\equiv K'$

Vậy EQ,FP,AD đồng quy tại K

Câu IV.

Với $a,b,c>0, a+b+c=3$ ta có:

$$P=\frac{a(a+bc)^2}{b(ab+2c^2)}+\frac{b(b+ca)^2}{c(bc+2a^2)}+\frac{c(c+ab)^2}{a(ca+2b^2)}=\frac{a^2(a+bc)^2}{ab(ab+2c^2)}+\frac{b^2(b+ca)^2}{bc(bc+2a^2)}+\frac{c^2(c+ab)^2}{ca(ca+2b^2)}$$

Áp dụng BĐT $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$ ta có:

$$P\ge\frac{(a^2+b^2+c^2+3abc)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)}\Rightarrow P\ge\frac{(a^2+b^2+c^2+3abc)^2}{(ab+bc+ca)^2}$$

Đặt $\begin{cases}a+b+c=p\\ ab+bc+ca=q\\ abc=r\end{cases}$, áp dụng BĐT Schur ta có: $9r\ge p(4q-p^2)$

$$\Rightarrow 9abc\ge 3[4(ab+bc+ca)-9]\Leftrightarrow 3abc\ge 4(ab+bc+ca)-9$$

Khi đó ta có:

$$P\ge\frac{[a^2+b^2+c^2+4(ab+bc+ca)-9]^2}{(ab+bc+ca)^2}$$

$$P\ge\frac{[(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)-9]^2}{(ab+bc+ca)^2}$$

$$P\ge\frac{[3^2+2(ab+bc+ca)-9]^2}{(ab+bc+ca)^2}\Rightarrow P\ge\frac{4(ab+bc+ca)^2}{(ab+bc+ca)^2}=4$$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$

Vậy $P\ge 4(dfcm)$