TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN TỈNH BÀ RỊA VŨNG TÀU

ĐỀ THI MÔN : TOÁN (Chuyên)

Năm học: 2021-2022

Câu 1 $(3,0$ điểm).

a) Rút gon biểu thức $P=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2}\right)$ với $x\geq 0, x\neq 1, x\neq 4$.

b) Giadi phương trình $5x-(x+4)\sqrt{2x+1}+4=0$.

c) Giai hế phương trinh $\begin{cases}2x^2+y^2+3xy+4x+3y+2=0\\ \sqrt{x^2-y+3}+\sqrt{x+y+1}=2\end{cases}$.

Câu 2 (2, 0 điểm).

a) Cho hai da thức $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và $Q(x)=3x^2+2ax+b(a,b,c\in\mathbb{R})$. Biết rằng $P(x)$ có ba nghiệm phân biệt. Chưng minh $Q(x)$ có hai nghiềm phân biệt.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thoa mần phương trình $(xy-1)^2=x^2+y^2$.

Câu 3 (1, 0 điểm). Xét các số thực a,b,c không âm, thỏa măn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{a}{1+bc}+\dfrac{b}{1+ac}+\dfrac{c}{1+ab}$.

Câu 4 (3, 0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB<AC$). Một đường trơn đi qua B,C và khỏng đi qua A cat các cạnh AB,AC lần lượt tại $E,F(E$ khác $B;F$ khác C); BF cắt CE tại D. Gọi P là trung điểm của BC và K là điểm đối xứng với D qua P.

a) Chứng minh tam giác KBC đồng dạng với tam giác DFE và $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{CK}$.

b) Gọi M,N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB,AC. Chửng minh MN vuông góc với AK và $MA^2+NK^2=NA^2+MK^2$.

c) Gọi I,J lần lựt là trung điềm AD và MN, Chứng minh ba điểm I,J,P thẳng hàng.

d) Đường thẳng IJ cát đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN tại T (T khade l). Chưng minh AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DTJ.

Câu 5: (1 điểm) Cho tam giác ABC và điểm O thay đổi trong tam giác.Tia Ox song song với AB

cắt BC tại D, tia Oy song song với BC cắt AC tai E, tia Oz song song với AC cắt AB tạ F. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(\dfrac{AB}{OD}\right)^2+\left(\dfrac{BC}{OE}\right)^2+\left(\dfrac{AC}{OF}\right)^2$

HƯỚNG DẪN

Câu 1 (3.0 điêm).

a) Rút gọn biểu thức sau $P=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2}\right)$ với

$x\ge 0, x\ne 1, x\ne 4$

b) Giải phương trình $5x-(x+4)\sqrt{2x+1}+4=0$.

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+y^2+3xy+4x+3y+2=0\\ \sqrt{x^2-y+3}+\sqrt{x+y+1}=2\end{cases}$.

$$P=\frac{(\sqrt{x})^3-1}{1+\sqrt{x}+x}\cdot\left[\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}-\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}\right]$$

$$=(\sqrt{x}-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$=(\sqrt{x}-1)\frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{2}$. Đặi $t=\sqrt{2x+1}(t\ge 0)$. Ta có phương trình $-t^3+5t^2-7t+3=0$

$\Leftrightarrow (t-1)\left(-t^2+4t-3\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\ t=3\end{array}\right.$ (nhận).

* Voi $t=1\Rightarrow\sqrt{2x+1}=1\Leftrightarrow x=0$ (thỏa).

* Với $t=3\Rightarrow\sqrt{2x+1}=3\Leftrightarrow x=4$ (thỏa).

$\{2x^2+y^2+3xy+4x+3y+2=0$ (1)

$\{\sqrt{x^2-y+3}+\sqrt{x+y+1}=2$ (2)

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-y+3\ge 0\\ x+y+1\ge 0\end{cases}$

(1): $y^2+(3x+3)y+2x^2+4x+2=0$

$\Delta_y=(x+1)^2$ nên (1) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-2x\\ y=-x\end{array}\right.$

* TH1: $y=-x-1$ thay vào (2) ta có phương trình

$$\sqrt{x^2+x+4}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=-1 \\ x=-1 \Rightarrow y=0 \end{array}\right. \text{ (nhận)}$$

* TH2: $y=-2x-2$ thay vào (2) ta có phương trình

$$\sqrt{x^2+2x+5}+\sqrt{-x-1}=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+4}+\sqrt{-(x+1)}=2$$

Ta có $\sqrt{(x+1)^2+4}+\sqrt{-(x+1)} \geq 2$, với mọi giá trị của $x \leq -1$ Dấu bằng xảy ra khi $x=-1 \Rightarrow y=0$ (nhận) Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $(0;-1),(-1;0)$.

Câu 2 (2, 0 điểm).

a) Cho hai đa thức $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ và $Q(x)=3x^2+2ax+b(a,b,c \in \mathbb{R})$. Biết rằng $P(x)$ có ba nghiệm phân biệt. Chứng minh $Q(x)$ có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ ihỏa mãn phương trình $(xy-1)^2=x^2+y^2$

a) Gọi x_1,x_2,x_3 là ba nghiệm phân biệt của $P(x)$, ta có $P(x)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\left(x-x_3\right)$

$$=x^3-\left(x_1+x_2+x_3\right)x^2+\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)x-x_1x_2x_3$$

Đồng nhất hệ số của $P(x)$ ta có:

$$\Delta_Q=a^2-3b=(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$
$$=\frac{1}{2}\left[(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1-x_3)^2\right]>0$$

Vậy Q(x có hai nghiệm phân biệt

Lưu y: hs sử dụng Viet vẫn cho điểm tối đa

b/

Ta có: (xy-1)^2=x^2+y^2 $\Leftrightarrow (xy)^2-2xy+1=x^2+y^2 \Leftrightarrow (x+y)^2-(xy)^2=1$

$$\Leftrightarrow (x+y-xy)(x+y+xy)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y-xy=1 \\ x+y+xy=1 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} x+y-xy=-1 \\ x+y+xy=-1 \end{cases} (2) \end{array}\right.$$

Giải hệ (1) ta được cặp nghiệm (0;1),(1;0)

Giải hệ (2) ta được cặp nghiệm (0;-1),(-1;0)

Câu 3:

$$(1+bc)^2 = 1+2bc+b^2c^2 = a^2+b^2+c^2+2bc+2b^2c^2$$

$$= a^2+(b+c)^2+b^2c^2 \geq a^2+(b+c)^2 \geq \frac{1}{2}(a+b+c)^2$$

Ta có : $\Rightarrow 1+bc \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b+c) \Rightarrow \frac{a}{1+bc} \leq \sqrt{2}\frac{c}{a+b+c}$ ...*tuongtu*

$$\Rightarrow S \leq \sqrt{2}\left(\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}\right) = \sqrt{2}$$

Khi a=b=$\frac{\sqrt{2}}{2}, c=0$ thì S = $\sqrt{2}$. Vậy giá trị lớn nhất của S là $\sqrt{2}$.

Theo BĐT AM-GM:

$$a(1+bc) \leq \frac{a^2+1}{2}\left(1+\frac{b^2+c^2}{2}\right) = \frac{(a^2+1)(2+b^2+c^2)}{4} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{a^2+1+2+b^2+c^2}{2}\right)^2$$

Từ đó :

$\frac{a}{1+bc} \geq a^2$. Tuong tu $\frac{b}{1+ac} \geq b^2; \frac{c}{1+ab} \geq c^2 \Rightarrow S \geq a^2+b^2+c^2 = 1$ Khi $a=1; b=c=0$ thì $S=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 1.

Câu 4:(3 điểm)

Chưa vẽ hình

Tứ giác BCFE nội tiếp nên ta có: $\widehat{DEF} = \widehat{DBC}$; $\widehat{DFE} = \widehat{DCB}$

Mặt khác: BDCK là hình bình hành nên $\widehat{BCK} = \widehat{DBC}$; $\widehat{CBK} = \widehat{DCB}$

Do đó : $\widehat{DEF} = \widehat{BCK}$; $\widehat{DFE} = \widehat{CBK} \Rightarrow \Delta KBC \sim \Delta DFE(gg)$

$\Delta KBC \sim \Delta DFE \Rightarrow \frac{DE}{CK} = \frac{EF}{BC}(1); \Delta AEF \sim \Delta ACB \Rightarrow \frac{FE}{BC} = \frac{AE}{AC}(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CK}$

Gọi Q là giao điểm của MN và AK. Ta có: $\widehat{AEC} = \widehat{ABK}$ (đồng vi) và

$\widehat{ABK} = \widehat{ABD} + \widehat{DBK} = \widehat{ACE} + \widehat{DCK} = \widehat{ACK}$

(Do $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}; \widehat{DBK} = \widehat{DCK}$)

Xét ΔAED và ΔACK có: $\widehat{AED} = \widehat{ACK}, \frac{DE}{CK} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \Delta AED \cup \Delta ACK(c-g-c)$

$\Rightarrow \widehat{KAC} = \widehat{DAE}$ hay $\widehat{QAC} = \widehat{DAM}$

b) Có $\widehat{AMD} + \widehat{AND} = 180° \Rightarrow AMDN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DNM} = \widehat{DAM} = \widehat{QAN}$.

Mà $\widehat{DNM}+\widehat{MNA}=90^\circ \Rightarrow \widehat{QAN}+\widehat{MNA}=90^\circ \Rightarrow \widehat{AQN}=90^\circ \Rightarrow AK\perp MN$

Do đó:

$MA^2+NK^2=QM^2+QA^2+QN^2+QK^2$

$=QN^2+QA^2+QM^2+QK^2=NA^2+MK^2$

Ta có $MI=\frac{1}{2}AD=NI\Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của $MN(3)$

c) Ta có IP là đường trung bình của tam giác $ADK\Rightarrow IP//AK\Rightarrow IP\perp MN$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra IP là đường trung trực của $MN\Rightarrow I,J,P$ thẳng hàng. Từ (3) và Ta có ΔIMN cân tại $I, IJ\perp MN$ nên IT là đường kính của đường tròn ngoại

tiếp $\Delta IMN\Rightarrow \widehat{INT}=90^\circ\Rightarrow IJ.IT=IN^2$

Mà $IN=ID\Rightarrow IJ.IT=ID^2\Rightarrow \Delta IDJ\backsim\Delta ITD(g-g)\Rightarrow \widehat{IDJ}=\widehat{ITD}$

$\Rightarrow ID$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔDTJ.

Câu $5(1,0$ **điểm)**. Cho tam giác ABC và điểm O thay đổi trong tam giác. Tia Ox song song với AB cắt BC tại D, tia Oy song song với BC cắt AC tại E, tia Oz song song với AC cắt AB tại F. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(\frac{AB}{OD}\right)^2+\left(\frac{BC}{OE}\right)^2+\left(\frac{AC}{OF}\right)^2$

Kẻ $DM\ //OF(M\in AB), EN//OD(N\in BC), FP//OE(P\in AC)$

Ta có: $\frac{OD}{AB}=\frac{EN}{AB}=\frac{NC}{BC}(1);\frac{OE}{BC}=\frac{DN}{BC}(2);\ \frac{OF}{AC}=\frac{MD}{AC}=\frac{BD}{BC}(3)$

Từ $(1),(2),(3)\Rightarrow \frac{OD}{AB}+\frac{OE}{BC}+\frac{OF}{AC}=\frac{NC}{BC}+\frac{DN}{BC}+\frac{BD}{BC}=1$

Theo bất đẳng thức AM-GM:

$$1=\frac{OD}{AB}+\frac{OE}{BC}+\frac{OF}{AC}\ge 3\sqrt[3]{\frac{OD}{AB}\cdot\frac{OE}{BC}\cdot\frac{OF}{AC}}\Leftrightarrow \frac{AB}{OD}\cdot\frac{BC}{OE}\cdot\frac{AC}{OF}\ge 27$$

$$\Rightarrow S=\left(\frac{AB}{OD}\right)^2+\left(\frac{BC}{OE}\right)^2+\left(\frac{AC}{OF}\right)^2\ge 3\sqrt[3]{\left(\frac{AB}{OD}\cdot\frac{BC}{OE}\cdot\frac{AC}{OF}\right)^2}=27$$

Đẳng thức xảy ra khi O là trọng tâm ΔABC. Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 27.