SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **BẾN TRE** ĐỀ CHÍNH THỨC	ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CÔNG LẬP NĂM HỌC 2021 – 2022 Môn: TOÁN (chuyên) Thời gian: 150 phút (không kể phát đề)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=(6-7m)x+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Cho Parabol $(P): y=2x^2$ và đường thẳng $(d): y=-x+6$. Biết (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ với $x_1<x_2$. Tính $4x_2+y_1$.

c) Rút gọn biểu thức $A=\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\sqrt{4x+4\sqrt{x-2}-7}$ (với $x\ge 2$).

Câu 2. (1,0 điểm)

Cho phương trình: $x^2-(m+3)x+4m-4=0$ (1), với m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+x_1x_2=20$.

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2y-xy+2x-1=y^2-xy^2-2y$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2-2xy-2=0 \\ 4x^2-y^2+y-2x+2=0. \end{cases}$

c) Giải phương trình: $(x+3)\left(\sqrt{2x+5}-2\sqrt{x+2}\right)+\sqrt{2x^2+9x+10}=1$.

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho ba số thực dương x, y z thỏa $3\sqrt{xy}+\sqrt{xz}=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4yz}{x}+\frac{5xz}{y}+\frac{7xy}{z}\ge 8.$$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A với ($AB>AC$), có đường cao AH. Biết $BC=1\text{dm}$ và $AH=\frac{12}{25}\text{dm}$.

a) Tính độ dài hai cạnh AB và AC

b) Kẻ $HD\perp AB$; $HE\perp AC$ (với $D\in AB$, $E\in AC$). Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $IA\perp DE$.

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC có đường phân giác ngoài của góc A cắt đường thẳng BC tại điểm D. Gọi M là trung điểm của BC. Đường tròn ngoại tiếp ΔADM cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại E và F (với E, F khác A). Gọi N là trung điểm của EF. Chứng minh rằng $MN \parallel AD$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=(6-7m)x+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Cho Parabol $(P): y=2x^2$ và đường thẳng $(d): y=-x+6$. Biết (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ với $x_1<x_2$. Tính $4x_2+y_1$.

c) Rút gọn biểu thức $A=\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\sqrt{4x+4\sqrt{x-2}-7}$ (với $x\geq 2$).

<u>Lời giải</u>

a) Hàm số $y=(6-7m)x+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 6-7m<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{6}{7}$.

Vậy $m>\dfrac{6}{7}$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d), ta có:

$$2x^2=-x+6 \Leftrightarrow 2x^2+x-6=0$$

Có: $\Delta=(-1)^2+4.2.6=49>0$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{49}}{2.2}=-2 \text{ và } x_2=\frac{-1+\sqrt{49}}{2.2}=\frac{3}{2}$$

Với $x_1=-2$, ta có $y_1=8$, suy ra $A(-2;8)$.

Với $x_2=\dfrac{3}{2}$, ta có $y_2=\dfrac{9}{2}$, suy ra $B\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right)$.

Khi đó, ta có:

$$4x_2+y_1=4.\frac{3}{2}+8=14.$$

Vậy $4x_2+y_1=14$.

c)

$$\begin{aligned}
A&=\left(\sqrt{x-2}-1\right)^2+\sqrt{4x+4\sqrt{x-2}-7}\\
&=x-2-2\sqrt{x-2}+1+\sqrt{\left(2\sqrt{x-2}\right)^2+2.2\sqrt{x-2}+1}\\
&=x-1-2\sqrt{x-2}+\sqrt{\left(2\sqrt{x-2}+1\right)^2}\\
&=x-1-2\sqrt{x-2}+\left|2\sqrt{x-2}+1\right|\\
&=x-1-2\sqrt{x-2}+2\sqrt{x-2}+1 \qquad \left(\text{do } 2\sqrt{x-2}+1>0\right)\\
&=x
\end{aligned}$$

Vậy $A=x$.

Câu 2. (1,0 điểm)

Cho phương trình: $x^2-(m+3)x+4m-4=0$ (1), với m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+x_1x_2=20$.

Lời giải

Ta có: $\Delta=(m+3)^2-4(4m-4)=m^2+6m+9-16m+16=m^2-10m+25=(m-5)^2$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta>0\Leftrightarrow(m-5)^2>0\Leftrightarrow m-5\neq0\Leftrightarrow m\neq5$$

Vậy với $m\neq5$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Theo đề bài ta có: $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+x_1x_2=20$ (2), với điều kiện $\begin{cases}x_1\geq0\\x_2\geq0\end{cases}$

Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1\geq0$ và $x_2\geq0$, nghĩa là

$$\begin{cases}m\neq5\\m+3\geq0\\4m-4\geq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq5\\m\geq-3\\m\geq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq5\\m\geq1\end{cases}\ (*)$$

Áp dụng định lý Vi-et, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=m+3\\x_1x_2=4m-4\end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2&=x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}\\&=m+3+2\sqrt{4m-4}\\&=m+3+4\sqrt{m-1}\\&=m-1+4\sqrt{m-1}+4=\left(\sqrt{m-1}+2\right)^2\end{aligned}$$

Từ đó, ta suy ra

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{m-1}+2\qquad\left(\text{do }\sqrt{m-1}+2>0,\forall m\geq1\right)$$

Từ phương trình (2), ta được

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+x_1x_2=20\Leftrightarrow\sqrt{m-1}+2+4m-4=20\Leftrightarrow\sqrt{m-1}=22-4m\ (3)$$

Giải phương trình (3) với điều kiện: $22-4m\geq0\Leftrightarrow m\leq\dfrac{11}{2}$ (**)

$$\begin{aligned}(3)&\Leftrightarrow m-1=(22-4m)^2\\&\Leftrightarrow m-1=484-176m+16m^2\\&\Leftrightarrow16m^2-177m+485=0\qquad(4)\end{aligned}$$

Ta có: $\Delta=(-177)^2-4.16.485=289>0$

Vậy phương trình (4) có 2 nghiệm phân biệt:

$$m=\frac{177-\sqrt{289}}{2.16}=5\ \text{ và }\ m=\frac{177+\sqrt{289}}{2.16}=\frac{97}{16}$$

So với điều kiện (*) và (**) thì $m \in \varnothing$.

Vậy không tồn tại giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2y - xy + 2x - 1 = y^2 - xy^2 - 2y$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y^2 - 2xy - 2 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + y - 2x + 2 = 0. \end{cases}$

c) Giải phương trình: $(x+3)\left(\sqrt{2x+5} - 2\sqrt{x+2}\right) + \sqrt{2x^2 + 9x + 10} = 1$.

<u>Lời giải</u>

a) Ta có:

$$\begin{aligned} & x^2y - xy + 2x - 1 = y^2 - xy^2 - 2y \\ \Leftrightarrow\ & x^2y - xy + 2x - 1 - y^2 + xy^2 + 2y = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(x^2y + xy^2\right) - \left(xy + y^2\right) + 2(x+y) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & xy(x+y) - y(x+y) + 2(x+y) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & (x+y)(xy - y + 2) = 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Vì đây là phương trình nghiệm nguyên nên ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x + y = 1 \\ xy - y + 2 = 1 \end{cases} & (*) \\ \begin{cases} x + y = -1 \\ xy - y + 2 = -1 \end{cases} & (**) \end{array}\right.$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ (1-y)y - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ -y^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; y = 1 \\ x = 2; y = -1 \end{array}\right.$$

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - y \\ (-1-y)y - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - y \\ -y^2 - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - y \\ \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; y = 1 \\ x = 2; y = -3 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là: $S = \{(0;1),(2;-1),(-2;1),(2;-3)\}$.

b) Ta có:

$$\begin{cases} y^2-2xy-2=0 \\ 4x^2-y^2+y-2x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-2xy=2 \\ (4x^2-y^2)+(y-2x)+(y^2-2xy)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-2xy=2 \\ (2x-y)(2x+y)-(2x-y)-y(2x-y)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-2xy=2 \\ (2x-y)[2x+y-1-y]=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-2xy=2 \\ (2x-y)(2x-1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-2xy=2 \\ \left[\begin{array}{l} 2x-y=0 \\ 2x-1=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

Mặt khác, $y^2-2xy=2 \Leftrightarrow y(y-2x)=2$, nghĩa là $y-2x \neq 0$.

Do đó, từ hệ phương trình ban đầu đề cho, ta giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} y^2-2xy=2 \\ 2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y^2-y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy hệ có tập nghiệm là $S=\left\{\left(\dfrac{1}{2};-1\right),\left(\dfrac{1}{2};2\right)\right\}$

c) Giải phương trình (*): $(x+3)\left(\sqrt{2x+5}-2\sqrt{x+2}\right)+\sqrt{2x^2+9x+10}=1$.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 2x^2+9x+10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{-5}{2} \\ x \geq -2 \\ x \leq \dfrac{-5}{2} \vee x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2$.

Ta đặt $\begin{cases} a=\sqrt{2x+5} & (a \geq 1) \\ b=\sqrt{x+2} & (b \geq 0) \end{cases}$

Ta thấy $\begin{cases} a^2-2b^2=(2x+5)-2(x+2)=1 \\ a^2-b^2=(2x+5)-(x+2)=x-3 \\ ab=\sqrt{(2x+5)(x+2)}=\sqrt{2x^2+9x+10} \end{cases}$

Phương trình (*) trở thành:

$$\left(a^2-b^2\right)(a-2b)+ab=a^2-2b^2 \Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)(a-2b)-\left(a^2-b^2\right)+\left(b^2+ab\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(a^2-b^2\right)(a-2b-1)+\left(b^2+ab\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b)(a-2b-1)+b(a+b)=0$$
$$\Leftrightarrow (a+b)\left[(a-b)(a-2b-1)+b\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a+b=0 & (1) \\ (a-b)(a-2b-1)+b=0 & (2) \end{array}\right.$$

Vì $a+b\geq 1$ nên ta chỉ giải phương trình (2)

$$(a-b)(a-2b-1)+b=0 \Leftrightarrow (a-b)(a-b-1)-b(a-b)+b=0$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(a-b-1)-b(a-b-1)=0$$
$$\Leftrightarrow (a-b-1)(a-2b)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-b-1=0 \\ a-2b=0 \end{array}\right.$$

TH1: Với $a-2b=0$, ta có

$$a-2b=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+5}-2\sqrt{x+2}=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+5}=2\sqrt{x+2}$$
$$\Leftrightarrow 2x+5=4(x+2) \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$$

So với điều kiện thì $x=-\frac{3}{2}$ (Nhận).

TH2: Với $a-b-1=0$, ta có

$$a-b-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+5}-\sqrt{x+2}-1=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+5}=\sqrt{x+2}+1$$
$$\Leftrightarrow 2x+5=x+3+2\sqrt{x+2}$$
$$\Leftrightarrow x+2-2\sqrt{x+2}=0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}\left(\sqrt{x+2}-2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2}=0 \\ \sqrt{x+2}-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ \sqrt{x+2}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x+2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$$

So với điều kiện thì $x=2$ (Nhận) và $x=-2$ (Nhận).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{-2;-\frac{3}{2};2\right\}$.

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho ba số thực dương x, y z thỏa $3\sqrt{xy}+\sqrt{xz}=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4yz}{x}+\frac{5xz}{y}+\frac{7xy}{z}\geq 8.$$

<u>Lời giải</u>

Ta đặt $M=\frac{4yz}{x}+\frac{5xz}{y}+\frac{7xy}{z}$, ta có

$$\begin{aligned}M&=\frac{4yz}{x}+\frac{5xz}{y}+\frac{7xy}{z}\\&=\frac{yz}{x}+3\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+4\frac{xz}{y}+3\frac{xy}{z}+4\frac{xy}{z}\\&=\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}\right)+3\left(\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}\right)+4\left(\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}\right)\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$\begin{aligned}M&\ge 2\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{xz}{y}}+3.2\sqrt{\frac{yz}{x}.\frac{xy}{z}}+4.2\sqrt{\frac{xz}{y}.\frac{xy}{z}}\\&\ge 2z+6y+8x\\&\ge(2z+2x)+(6y+6x)\end{aligned}$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$\begin{aligned}M&\ge 2.2\sqrt{xz}+6.2\sqrt{xy}\\&\ge 4\left(\sqrt{xz}+3\sqrt{xy}\right)=4.2=8\end{aligned}$$

Dấu "$=$" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=y=z\\\sqrt{xz}+3\sqrt{xy}=2\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2}$.

Vậy khi $x=y=z=\frac{1}{2}$ thì $M\ge 8$ (đpcm).

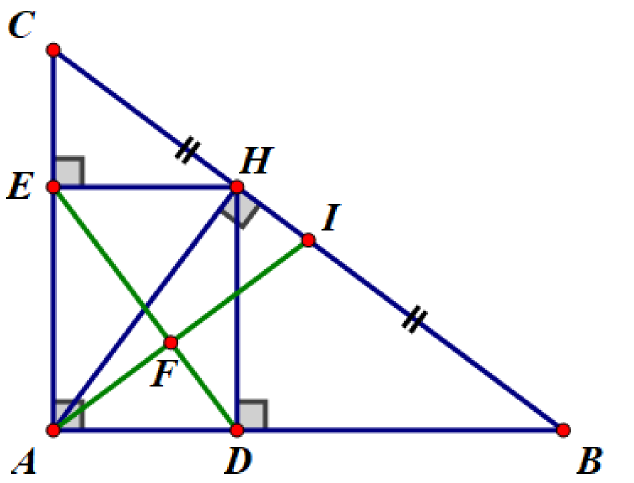
Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A với ($AB>AC$), có đường cao AH. Biết $BC=1\text{dm}$ và $AH=\frac{12}{25}\text{dm}$.

a) Tính độ dài hai cạnh AB và AC

b) Kẻ $HD\perp AB$; $HE\perp AC$ (với $D\in AB$, $E\in AC$). Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $IA\perp DE$.

Lời giải



a) Tính độ dài hai cạnh AB và AC

Áp dụng hệ thức lượng và định lý Pytago cho ΔABC vuông tại A, ta có:

$$\begin{cases} AB^2+AC^2=BC^2=1 \\ AB.AC=AH.BC=\dfrac{12}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2+AC^2=1 \\ AB^2.AC^2=\dfrac{144}{625} \end{cases}$$

Khi đó, AB^2 và AC^2 là các nghiệm dương của phương trình.

Áp dụng hệ quả của định lý Vi-et, ta được

$$X^2-1X+\frac{144}{625}=0$$

Ta có: $\Delta=1^2-4.1.\dfrac{144}{625}=\dfrac{49}{625}>0$ nên phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt:

$$X_1=\frac{1-\sqrt{\frac{49}{625}}}{2.1}=\frac{9}{25} \text{ và } X_2=\frac{1+\sqrt{\frac{49}{625}}}{2}=\frac{16}{25}$$

Theo giả thiết, $AB>AC$, nên ta được:

$$AB^2>AC^2\Rightarrow\begin{cases} AB^2=X_1=\dfrac{16}{25} \\ AC^2=X_2=\dfrac{9}{25} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} AB=\dfrac{4}{5} \\ AC=\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy $AB=\dfrac{4}{5}\text{dm}$ và $AC=\dfrac{3}{5}\text{dm}$.

b) Chứng minh $IA\perp DE$.

Gọi F là giao điểm của AI và DE.

Xét tứ giác $EHDA$, ta có: $\begin{cases} \widehat{HEA}=90^\circ & (HE\perp AC) \\ \widehat{HDA}=90^\circ & (HD\perp AB) \\ \widehat{DAE}=90^\circ & (\Delta ABC \text{ vuông tại A}) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $EHDA$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông)

$\Rightarrow$ Tứ giác $EHDA$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AHE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AE)

Mà $\widehat{AHE} = \widehat{ECH}$ (cùng phụ với $\widehat{CHE}$)

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ECH} \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ (1)

Xét ΔABC vuông tại A có I là trung điểm của BC

$\Rightarrow IA = IB = \frac{1}{2}BC$ (định lý đường trung tuyến trong tam giác vuông)

$\Rightarrow \Delta IAB$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IBA}$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra: $\widehat{ADE} + \widehat{IAB} = \widehat{ACB} + \widehat{IBA} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90^\circ$ (ΔABC vuông tại A)

Áp dụng định lý tổng 3 góc trong ΔADF, ta có:

$$\widehat{FAD} + \widehat{FDA} + \widehat{AFD} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{AFD} = 180^\circ - \left(\widehat{FAD} + \widehat{FDA}\right)$$

$$\Rightarrow \widehat{AFD} = 180^\circ - \left(\widehat{IAB} + \widehat{ACB}\right)$$

$$\Rightarrow \widehat{AFD} = 180^\circ - \left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right)$$

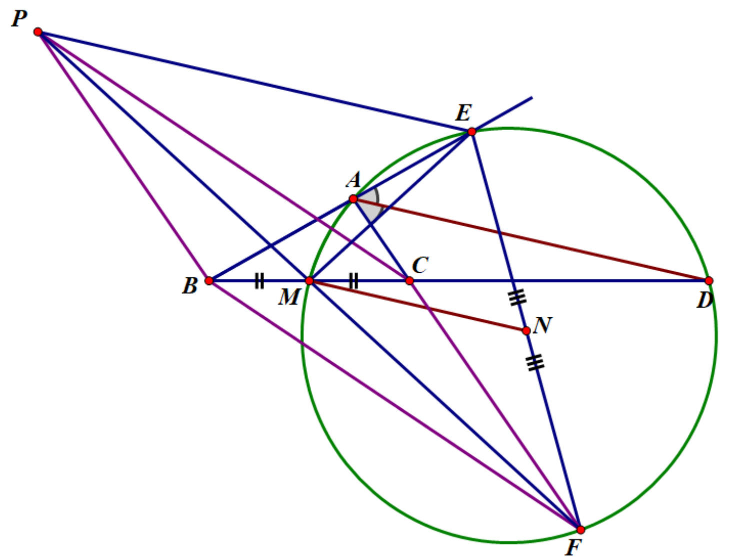
$$\Rightarrow \widehat{AFD} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \ \left(\Delta ABC \text{ vuông tại A}\right)$$

Do đó, $IA \perp DE$ (đpcm)

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC có đường phân giác ngoài của góc A cắt đường thẳng BC tại điểm D. Gọi M là trung điểm của BC. Đường tròn ngoại tiếp ΔADM cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại E và F (với E, F khác A). Gọi N là trung điểm của EF. Chứng minh rằng $MN // AD$.

Lời giải



Dựng hình bình hành $BPCF$.

$\Rightarrow$ Hai đường chéo BC và PF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mà M là trung điểm của BC (gt) $\Rightarrow M$ cũng là trung điểm của PF.

Xét ΔPEF, ta có N là trung điểm của EF (gt), M là trung điểm của PF (cmt)

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\Delta PEF \Rightarrow MN \parallel EP$ (1)

Ta có: $\widehat{MPB} = \widehat{MFA}$ (cặp góc so le trong của $PB \parallel FA$, $PBFC$ là hình bình hành)

Mà $\widehat{MDA} = \widehat{MEA} = \widehat{MFA}$ (các góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

$\Rightarrow \widehat{MEA} = \widehat{MPB}$, nghĩa là $\widehat{MEB} = \widehat{MPB}$

Xét tứ giác $BMEP$, ta có $\widehat{MEB} = \widehat{MPB}$ (cmt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMEP$ nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{BEP} = \widehat{BMP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BP)

Mà $\widehat{BMP} = \widehat{FMD}$ (đối đỉnh)

Mặt khác $\widehat{FMD} = \widehat{FAD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FD)

$\Rightarrow \widehat{BEP} = \widehat{FAD}$, nghĩa là $\widehat{AEP} = \widehat{FAD}$ (2)

Ta có: AD là phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$ (gt)

Mà $\widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow AD$ là phân giác của $\widehat{CAE} \Rightarrow \widehat{FAD} = \widehat{EAD}$ (3)

Từ (2) và (3), ta suy ra $\widehat{AEP} = \widehat{EAD}$

Mà 2 góc nằm ở vị trí so le trong nên $EP \parallel AD$ (4)

Từ (1) và (4), ta suy ra $MN \parallel AD$ (đpcm)